

# SEMAINE 17

---

## PHYSIQUE-CHIMIE

Terminale Générale

---

### CHAPITRES

CH04 Suivi d'une transformation chimique

CH11 Description d'un mouvement

CH12 Deuxième loi de Newton : mouvement dans le champ de pesanteur, dans le champ électrique, mouvement des satellites et planètes

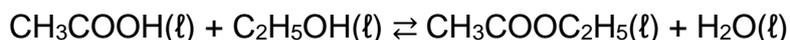
## EXERCICE 1 – UNE SÉRIE D'EXPÉRIENCES HISTORIQUES : LA RÉACTION D'ESTÉRIFICATION ÉTUDIÉE PAR MARCELLIN BERTHELOT (9 POINTS)

Marcellin Berthelot (1827-1907), auteur de nombreuses découvertes en chimie, est considéré comme l'un des plus grands scientifiques français du dix-neuvième siècle. Avec l'aide de son élève, Léon Péan de Saint-Gilles, il a étudié de manière approfondie la réaction entre un alcool et un acide carboxylique.

L'objectif de cet exercice est de montrer comment la technique du dosage par titrage a permis à Marcellin Berthelot de mettre en évidence les notions de cinétique chimique et d'équilibre chimique.

### 1. Dosage par titrage.

Berthelot et Péan de Saint-Gilles ont réalisé un mélange contenant les mêmes quantités de matière en acide éthanoïque et en éthanol laissé à la température ambiante de 20 °C. Il s'est formé de l'éthanoate d'éthyle et de l'eau. La transformation d'estérification qui s'est déroulée était très lente. Elle peut être modélisée par l'équation de réaction suivante :



**Q1.** Représenter la formule semi-développée de l'acide éthanoïque. Entourer et nommer le groupe caractéristique de la molécule. Nommer la famille fonctionnelle à laquelle appartient l'éthanoate d'éthyle.

La transformation s'étant poursuivie pendant quinze jours, un échantillon du mélange réactionnel a alors été prélevé afin de connaître l'évolution des quantités de matière des espèces chimiques en jeu. Pour Marcellin Berthelot : « *C'est évidemment l'acide qu'il faut déterminer. On transvase (l'échantillon) dans un vase à fond plat. On ajoute quelques gouttes de teinture de tournesol et l'on verse de l'eau de baryte avec une burette graduée jusqu'à ce que la teinte rose du tournesol ait viré au bleu franc.* »

#### Données :

- Le vase à fond plat est un erlenmeyer ;
- La teinture de tournesol est un indicateur coloré acido-basique ;
- L'eau de baryte est une solution aqueuse d'hydroxyde de baryum : elle contient les ions baryum  $\text{Ba}^{2+}(\text{aq})$ , spectateurs, et les ions hydroxyde  $\text{HO}^{-}(\text{aq})$  ;
- Couples acide / base mis en jeu :  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\ell) / \text{CH}_3\text{CO}_2^{-}(\text{aq})$  ;  $\text{H}_2\text{O}(\ell) / \text{HO}^{-}(\text{aq})$ .

**Q2.** Faire un schéma du dosage par titrage réalisé en y indiquant les positions de la solution titrante et de la solution titrée.

**Q3.** Écrire l'équation de réaction qui modélise la transformation lors du dosage par titrage entre l'acide éthanoïque présent dans l'échantillon et les ions hydroxyde provenant de la burette. Citer au moins une caractéristique que doit posséder toute réaction utilisée pour un dosage par titrage.

**Q4.** Indiquer la teinte de la forme acide de l'indicateur coloré.

On considère une solution titrante de concentration en quantité de matière  $c_B$  en ions hydroxyde  $\text{HO}^-$  (aq) de valeur égale à  $2,0 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$  et provoquant le changement de couleur pour un volume  $V_{BE}$  versé à l'équivalence de valeur égale à  $5,0 \text{ mL}$ .

**Q5.** En utilisant la relation entre les quantités de matière à l'équivalence, calculer la valeur de la quantité de matière  $n_A$  en acide éthanoïque dans l'échantillon titré.

**Données :**

- Le volume de l'échantillon  $V_{éch}$  vaut un centième du volume du mélange réactionnel initial  $V_i$ ;
- Le dosage par titrage réalisé a montré que 10 % de l'acide initial avait réagi.

**Q6.** Montrer que ce mélange contenait initialement une quantité de matière d'acide  $n_i$  de valeur égale à  $1,1 \text{ mol}$ .

**2. Cinétique chimique.**

Les dosages par titrage successifs d'échantillons issus du mélange réactionnel laissé à température ambiante ont permis d'obtenir les résultats du tableau de la figure 1.

| Temps écoulé en jours | Proportion de l'acide initial ayant réagi |
|-----------------------|---|
| 15                    | 10 %                                      |
| 22                    | 14 %                                      |
| 70                    | 37 %                                      |
| 72                    | 38 %                                      |
| 128                   | 47 %                                      |
| 154                   | 48 %                                      |
| 277                   | 54 %                                      |
| 368                   | 55 %                                      |

Figure 1. Expérience effectuée à la température  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

L'expérience a été reproduite en portant la température  $T_2$  du mélange réactionnel à la valeur constante égale à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau de la figure 2.

| Temps écoulé en jours | Proportion de l'acide initial ayant réagi |
|-----------------------|---|
| 4                     | 26 %                                      |
| 9                     | 37 %                                      |
| 15                    | 47 %                                      |
| 32                    | 56 %                                      |
| 60                    | 60 %                                      |
| 120                   | 65 %                                      |
| 150                   | 67 %                                      |
| 180                   | 67 %                                      |

Figure 2. Expérience effectuée à la température  $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q7.** Expliquer pourquoi l'ensemble des mesures de Marcellin Berthelot illustrent le fait que la température est un facteur cinétique. Au moins une comparaison quantitative s'appuyant sur les données des tableaux des figures 1 et 2 est attendue.

**Q8.** Définir le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  d'une transformation chimique. Pour l'expérience à la température  $T_2$ , donner l'encadrement de la valeur de  $t_{1/2}$  le plus précis possible selon les données de la figure 2, sachant que l'état final est atteint après 150 jours.

**Q9.** À l'aide du tableau de la figure 1 et de la quantité de matière initiale d'acide  $n_i$ , montrer qu'après les quinze premiers jours de l'expérience à température ambiante la valeur de la quantité de matière d'acide restant est égale à une mole.

**Données :**

- Vitesse volumique moyenne de disparition d'un réactif :  $v = \frac{C_{initiale} - C_{finale}}{\Delta t}$  ;
- Volume initial du mélange réactionnel :  $V_{mélange} = 130 \text{ mL}$ .

**Q10.** Calculer la valeur moyenne  $v$  de la vitesse volumique de disparition de l'acide, à température ambiante, sur la durée  $\Delta t = 15 \text{ j}$ . Le résultat sera exprimé en  $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{j}^{-1}$ .

**Q11.** Expliquer sans calcul comment évolue ensuite la vitesse de disparition de l'acide dans l'expérience se déroulant à  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Justifier ce comportement à l'aide d'un facteur cinétique autre que la température.

**Q12.** Proposer une modification du protocole qui permettrait d'accélérer la réaction d'estérification sans changer la température du mélange réactionnel.

### 3. Équilibre chimique.

Les expériences décrites dans les deux tableaux précédents ont été prolongées bien au-delà des durées qui y sont indiquées : elles ont montré que le mélange réactionnel n'évoluait plus lorsque 67 % de la quantité de matière d'acide initial avait réagi, quelle que soit sa température.

Dans le mémoire *Recherche sur les affinités* (1862-1863), Marcellin Berthelot a ainsi pu écrire :

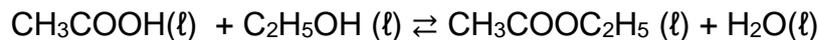
*« Il résulte de ces expériences que toutes les fois que l'action d'un acide sur un alcool a été suffisamment prolongée, ou réalisée à une température suffisamment élevée, la composition des systèmes devient sensiblement invariable. On voit en même temps que l'état d'équilibre qui se produit ainsi ne répond jamais à une saturation complète de l'acide par l'alcool ».*

**Q13.** Expliquer, en utilisant la notion d'avancement, la différence entre une réaction totale et une réaction menant à un équilibre chimique. Indiquer l'expression qu'utilise Marcellin Berthelot dans le texte ci-dessus pour parler d'une réaction totale.

**Q14.** Préciser en quoi le tableau de la figure 2 de mesures à la température  $T_2$  permettait déjà de soupçonner l'existence d'un équilibre chimique pour la réaction d'estérification. Citer une partie du texte ci-dessus évoquant l'intérêt de mener l'expérience à la température  $T_2$  de valeur égale à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Données :**

- On rappelle l'équation de la réaction modélisant la transformation étudiée :



- On considère un mélange réactionnel initial de volume  $V_{\text{mélange}} = 130 \text{ mL}$  à une température  $T$  de valeur égale à  $25^\circ\text{C}$ , contenant des quantités de matière identiques en acide et en alcool :  $n_{\text{acide}} = n_{\text{alcool}} = 1,1 \text{ mol}$  ;
- Concentration standard en quantité de matière à  $25^\circ\text{C}$  :  $c^\circ = 1,0 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$  ;
- L'eau n'étant pas le solvant, sa concentration en quantité de matière intervient dans l'expression du quotient de réaction.

**Q15.** Justifier que les concentrations en quantité de matière des quatre espèces chimiques en présence dans l'état d'équilibre ont pour valeur :

$$[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{éq}} = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]_{\text{éq}} = 2,8 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} ;$$

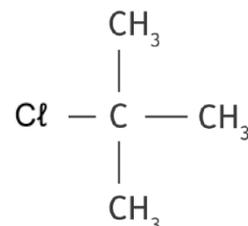
$$[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_{\text{éq}} = [\text{H}_2\text{O}]_{\text{éq}} = 5,7 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

**Q16.** À l'aide des données, établir l'expression du quotient de réaction  $Q$  de la réaction d'estérification. Indiquer sa valeur  $Q_i$  dans l'état initial, puis calculer sa valeur  $Q_{\text{éq}} = K$  dans l'état d'équilibre chimique.

**Q17.** Dans son mémoire, Marcellin Berthelot a présenté plusieurs méthodes permettant de faire réagir l'acide éthanoïque et l'éthanol avec un rendement supérieur à 67%. Proposer une méthode possible.

**EXERCICE 1 - SUIVI CINÉTIQUE PAR CONDUCTIMÉTRIE DE L'HYDROLYSE DU CHLORURE DE TERTIOBUTYLE (9 POINTS)**

Le chlorure de tertiobutyle est un composé organique utilisé comme solvant pour les peintures ou comme intermédiaire dans la synthèse de certains parfums. Instable en solution aqueuse, celui-ci se décompose par hydrolyse en formant un alcool.



La molécule de chlorure de tertiobutyle

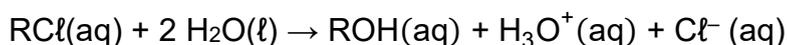
L'objectif de cet exercice est de suivre l'évolution temporelle de l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle.

**Suivi conductimétrique de l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle.**

Lorsqu'une transformation chimique lente met en jeu une espèce ionique, la conductimétrie permet d'étudier sa cinétique.

**Données :**

- Le chlorure de tertiobutyle a pour formule  $(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{Cl}$ . Pour simplifier, il sera noté par la suite  $\text{RCl}$  où le groupe alkyle  $\text{R}$  représente  $(\text{CH}_3)_3\text{C}-$  ;
- L'équation de la réaction modélisant l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle est :



- La valeur de la masse volumique  $\rho$  du chlorure de tertiobutyle :  $\rho = 0,850 \text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$  ;
- Tableau regroupant les masses molaires atomiques des atomes de carbone, d'hydrogène et de chlore :

| Atomes  | Carbone C | Hydrogène H | Chlore Cl |
|---|-----------|-------------|-----------|
| Masses molaires en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ | 12,0      | 1,00        | 35,5      |

**Q1.** Représenter la formule semi-développée de l'alcool  $\text{ROH}$  produit lors de l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle. Entourer et nommer le groupe caractéristique présent.

Pour réaliser l'étude cinétique de l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle, on met en œuvre le protocole suivant :

- Verser un volume  $V_e = 200 \text{ mL}$  d'un mélange d'eau et de propanone dans un bécher ;
- Placer le bécher dans un cristalliseur rempli d'eau ;
- Installer une sonde conductimétrique et un dispositif d'agitation ;
- À l'aide d'une pipette jaugée, verser un volume  $V = 1,0 \text{ mL}$  de chlorure de tertiobutyle dans le volume  $V_e$  et déclencher l'enregistrement à cet instant ;
- Mesurer la conductivité  $\sigma$  toutes les 5 minutes pendant environ 100 minutes en prenant soin de stopper l'agitation pendant les mesures.

La courbe représentant la variation de la conductivité  $\sigma$  en fonction du temps  $t$  est donnée figure 1.

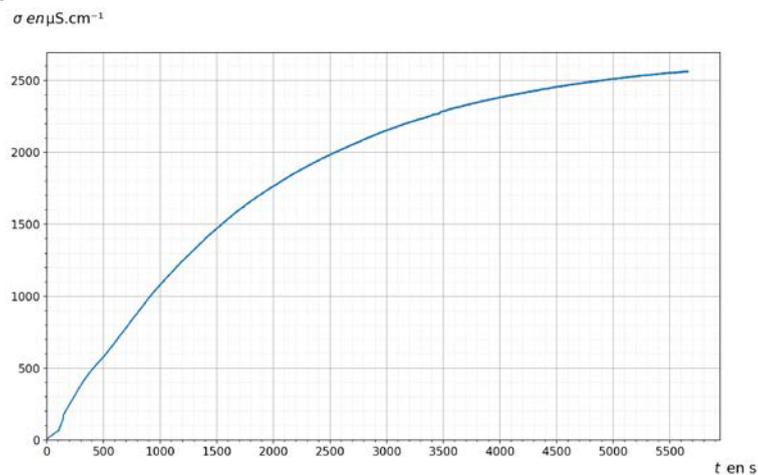


Figure 1. Représentation graphique des variations de la conductivité  $\sigma$  de la solution en fonction du temps  $t$ .

**Donnée :**

- Loi de Kohlrausch donne, pour une solution diluée, l'expression de la conductivité  $\sigma$  :

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot [X_i]$$

avec  $\lambda_i$  la conductivité molaire ionique de l'ion  $X_i$  et  $[X_i]$  la concentration en quantité de matière de l'ion  $X_i$ .

**Q2.** À partir de la loi de Kohlrausch, exprimer la conductivité  $\sigma$  de la solution en fonction des concentrations en quantité de matière en ions oxonium  $\text{H}_3\text{O}^+$  et en ions chlorure  $\text{Cl}^-$  respectivement notées  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  et  $[\text{Cl}^-]$  et des conductivités molaires ioniques de chaque ion notées  $\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}$  et  $\lambda_{\text{Cl}^-}$ .

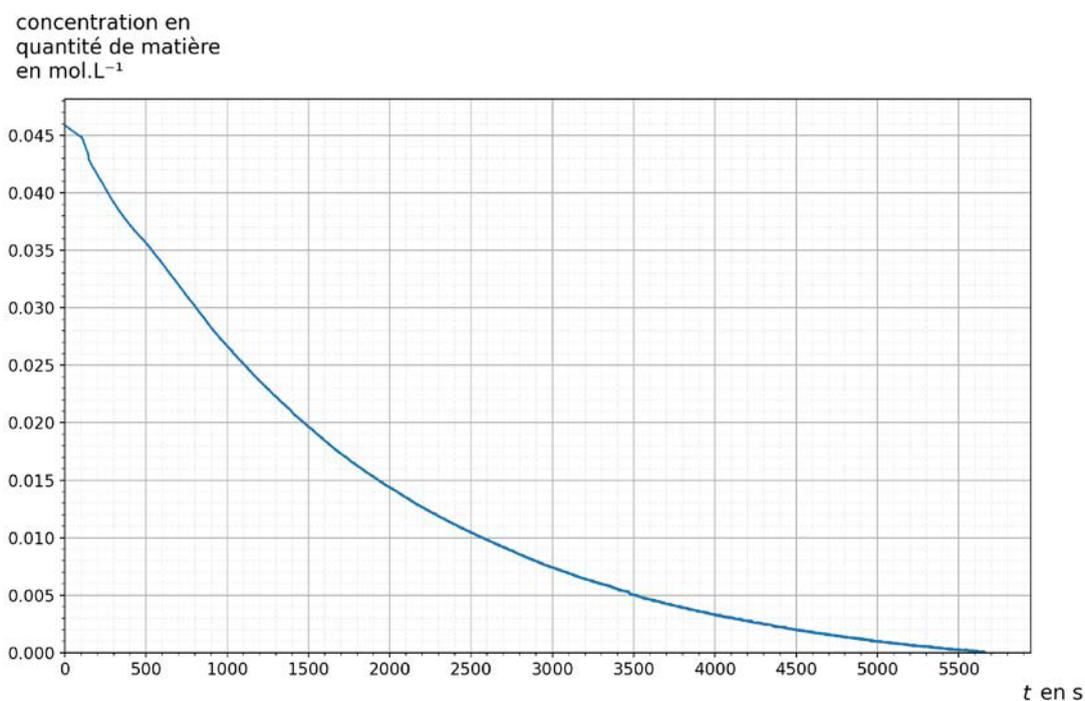
**Q3.** En déduire une expression de  $\sigma$  en fonction de la concentration en quantité de matière en ions oxonium  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  et des conductivités molaires ioniques  $\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}$  et  $\lambda_{\text{Cl}^-}$ .

**Q4.** À partir de l'expression établie à la question précédente, justifier qu'il est possible de réaliser un suivi cinétique par conductimétrie de l'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle.

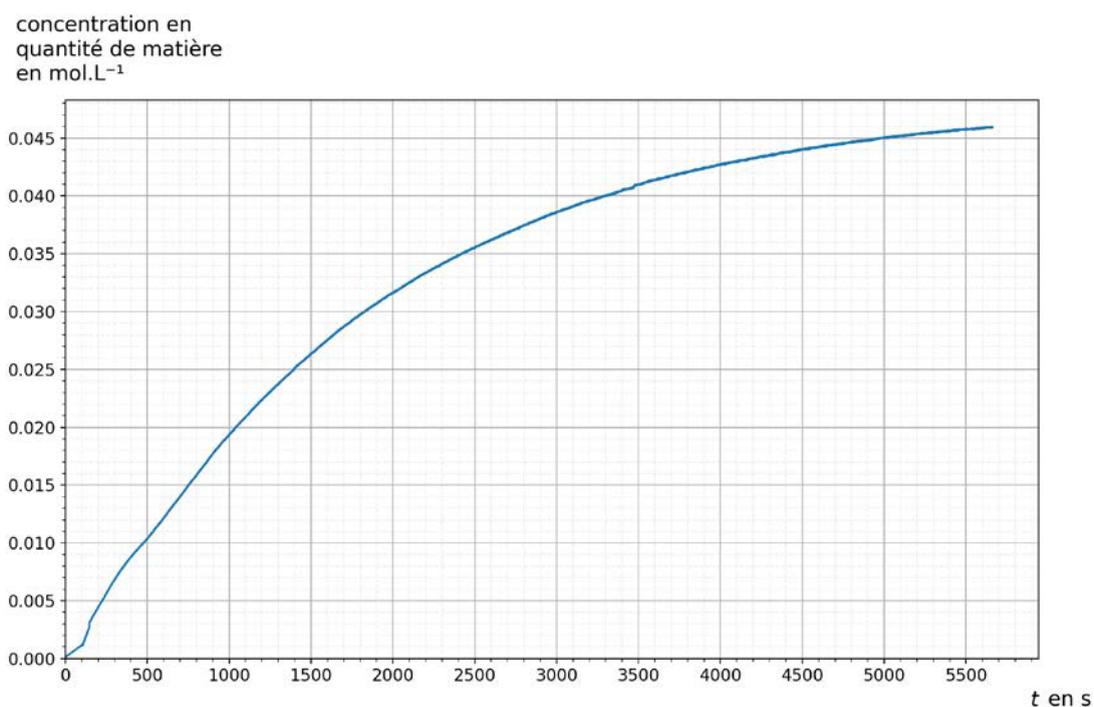
**Q5.** Calculer la valeur de la quantité de matière initiale de chlorure de tertiobutyle introduit notée  $n_0$ .

**Q6.** En déduire la valeur de la concentration en quantité de matière initiale en chlorure de tertiobutyle  $c_0$  dans le mélange réalisé conformément au protocole.

Les courbes représentant la concentration en quantité de matière en chlorure de tertiobutyle  $[\text{RC}\ell]$  et la concentration en quantité de matière en ions oxonium  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  en fonction du temps  $t$  sont données figure 2.



Courbe 1



Courbe 2

Figure 2. Représentations graphiques des variations des concentrations en quantité de matière  $[RC\ell]$  et  $[H_3O^+]$  en fonction du temps.

**Q7.** Associer, en justifiant votre choix, chaque courbe 1 et 2 à chacune des espèces chimiques  $RC\ell$  et  $H_3O^+$ .

**Q8.** À l'aide d'une des deux courbes, montrer que l'hydrolyse du chlorure de tertibutyle est totale.

**Q9.** Définir le temps de demi-réaction noté  $t_{1/2}$  d'une transformation chimique.

**Q10.** Estimer graphiquement sa valeur  $t_{1/2}$  à l'aide d'une des deux courbes de la figure 2.

**Loi de vitesse.**

**Q11.** Donner l'expression de la vitesse volumique de disparition  $v_{RC\ell}$  du chlorure de tertiobutyle.

**Q12.** Indiquer qualitativement comment évolue la vitesse volumique de disparition du chlorure de tertiobutyle  $v_{RC\ell}$  au cours du temps en justifiant votre réponse.

Si la cinétique de la transformation est d'ordre 1 alors la vitesse volumique de disparition du chlorure de tertiobutyle peut également s'écrire :  $v_{RC\ell}(t) = k \cdot [RC\ell]_{(t)}$  où  $k$  est une constante positive.

**Q13.** Donner l'allure de la courbe représentant la vitesse volumique de disparition du chlorure de tertiobutyle  $v_{RC\ell}$  en fonction de la concentration en chlorure de tertiobutyle  $[RC\ell]$  en sachant que la réaction suit une loi d'ordre 1.

**Q14.** Établir l'expression de l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $[RC\ell]_{(t)}$ .

La solution de l'équation différentielle est de la forme  $[RC\ell]_{(t)} = A \cdot e^{-k \cdot t}$ .

**Q15.** Déterminer la valeur de  $A$  à partir des conditions initiales de la transformation d'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle.

Pour linéariser l'expression de la solution, on utilise la fonction logarithme népérien. La courbe représentant le logarithme népérien de la concentration en chlorure de tertiobutyle  $\ln[RC\ell]$  en fonction du temps  $t$  est donnée figure 3.

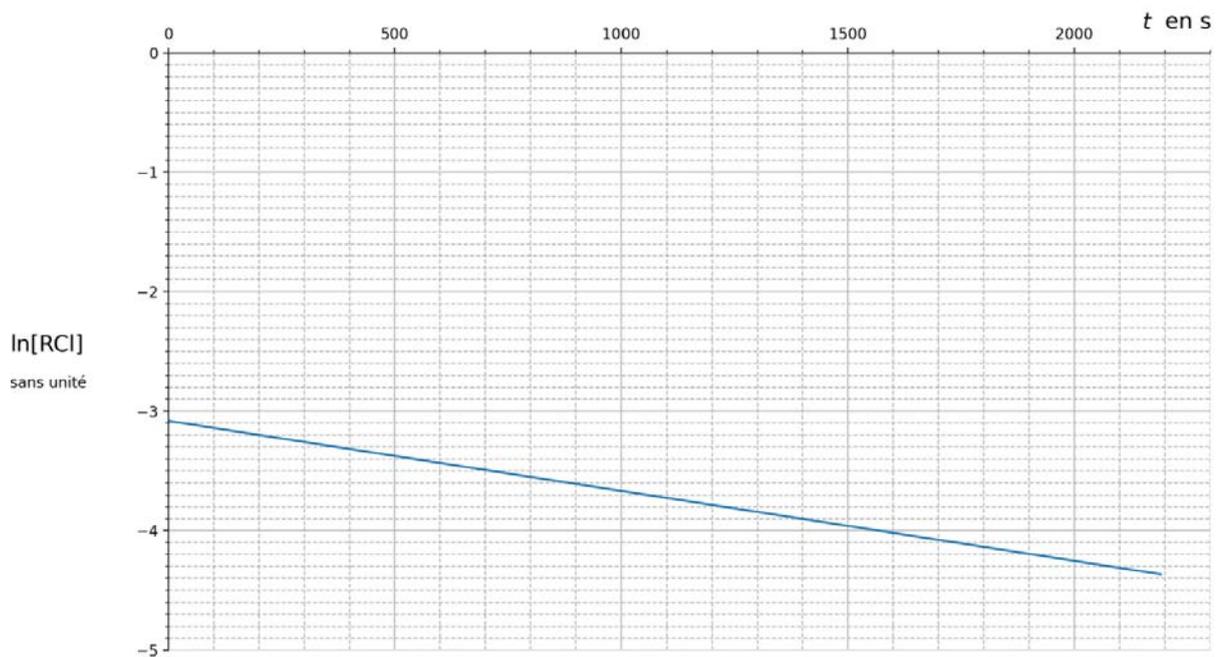


Figure 3. Représentation graphique des variations du logarithme népérien de la concentration en chlorure de tertiobutyle  $\ln[RCt]$  en fonction du temps  $t$ .

**Q16.** Calculer la valeur du coefficient directeur noté  $a$  de la droite obtenue.

**Données :**

- La valeur de  $k$  dans l'expression de la vitesse volumique de disparition du chlorure de tertiobutyle  $v_{RCt}(t) = k \cdot [RCt](t)$  est  $k = -a$  ;
- Le temps de demi-réaction noté  $t_{1/2}$  s'exprime en fonction de  $k$  :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ .

**Q17.** À l'aide de l'expression précédente, calculer la valeur du temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  et comparer à la valeur obtenue à la question Q10.

**EXERCICE I (9 points)**  
**LE MIEL ET LES ABEILLES**

Les abeilles sont capables de communiquer entre elles pour repérer les sources de nourriture et les sources de danger. Elles récoltent le nectar des fleurs pour le transformer en miel. Les miels vendus dans le commerce sont régulièrement analysés pour détecter d'éventuelles fraudes.

**Les parties A, B et C de l'exercice sont indépendantes.**

**Partie A : Du nectar au miel**

Les abeilles utilisent le nectar présent dans les fleurs pour fabriquer leur miel. Le nectar est aspiré par la trompe de la butineuse, puis il est emmagasiné dans son jabot où il est transformé en raison de l'absorption d'eau et de l'apport de salive riche en invertase. De retour à la ruche, la butineuse régurgite le contenu de son jabot aux ouvrières qui poursuivent la transformation dans leurs propres jabots.

Lors de cette transformation, le saccharose présent dans le nectar réagit avec l'eau pour former du glucose et du fructose qui sont les principaux constituants du miel. La molécule d'eau « casse » la molécule de saccharose en deux. On parle d'hydrolyse du saccharose. Cette transformation chimique est une transformation totale.

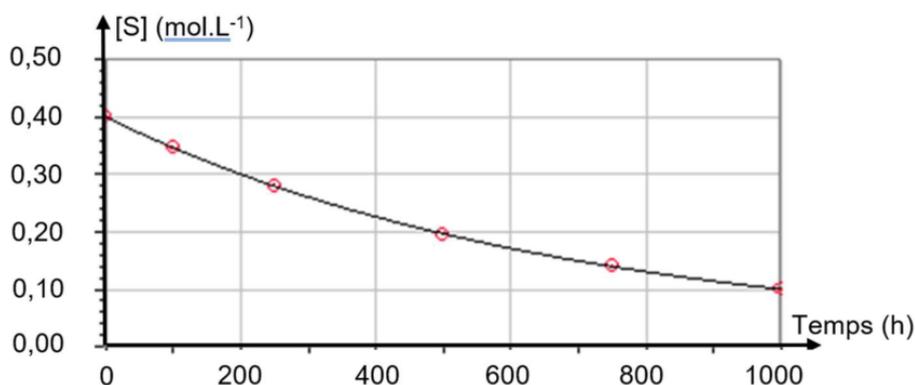
L'équation de la réaction d'hydrolyse est la suivante :



La température à l'intérieur de la ruche reste égale à 35 °C.

On se propose de déterminer l'ordre de la réaction d'hydrolyse du saccharose.

À température constante, à  $pH = 5$  constant, on mélange du saccharose avec de l'eau (sans invertase) et on suit l'évolution de la concentration du saccharose en fonction du temps. On obtient le graphique représenté sur la **figure 1**.  $[S]$  désigne la concentration en saccharose à l'instant  $t$  :



**Figure 1** : Graphique représentant l'évolution de la concentration  $[S]$  en fonction du temps.

Source : [dlecorgnechimie.fr](http://dlecorgnechimie.fr)

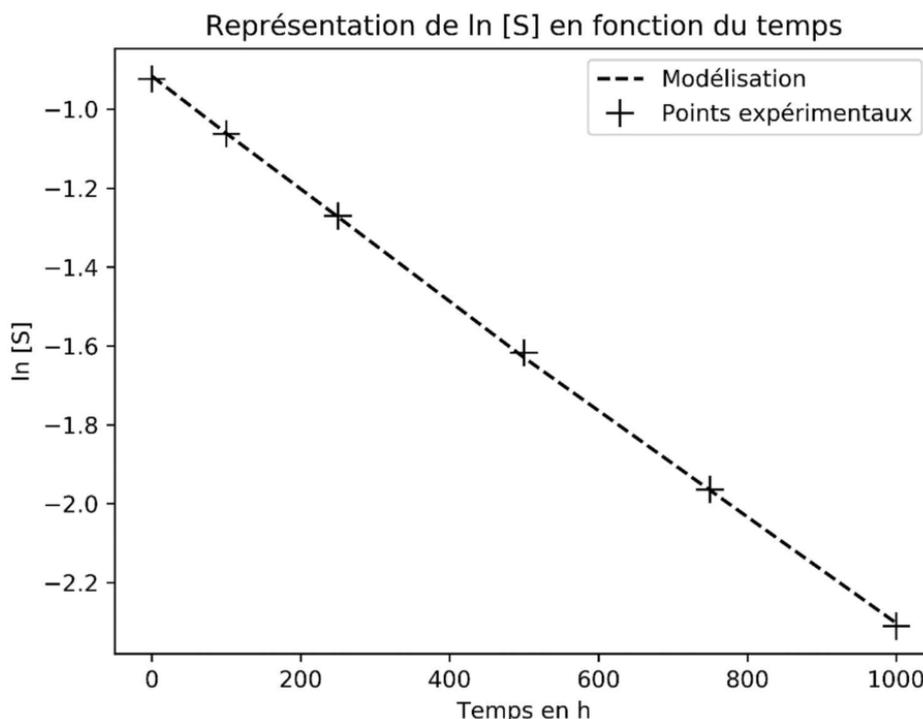
- A.1.** Justifier en quoi la transformation chimique peut être considérée comme lente.
- A.2.** En utilisant la **figure 1**, déterminer la concentration initiale en saccharose  $[S]_0$  ?
- A.3.** Estimer, en expliquant la démarche, la valeur du temps de demi-réaction  $t_{1/2}$ .

**A.4.** Définir la vitesse volumique de disparition  $v_{\text{disp}}$  du saccharose en fonction de la concentration en saccharose  $[S]$ .

**A.5.** Indiquer, en justifiant qualitativement, comment varie la vitesse de disparition du saccharose au cours du temps.

On fait l'hypothèse que l'hydrolyse du saccharose suit une loi de vitesse d'ordre 1. Dans ce cas, on montre que la concentration en saccharose  $[S]$  vérifie la relation  $\ln[S] = -k \times t + \ln[S]_0$  avec  $t$  le temps (en h),  $k$  la constante de vitesse à la température de l'expérience (en  $\text{h}^{-1}$ ) et  $\ln[S]_0$  le logarithme népérien de la concentration initiale en saccharose (sans unité).

Les valeurs de  $\ln[S]$  ont été calculées puis modélisées par la fonction  $\ln[S] = -k \times t + \ln[S]_0$  à l'aide d'un programme Python. On obtient alors le graphique représenté sur la **figure 2**.

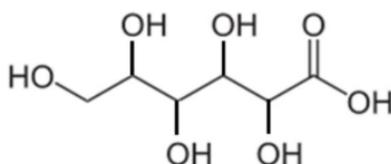


**Figure 2 :** Graphique représentant les données expérimentales et la modélisation

**A.6.** À partir de la modélisation représentée sur la **figure 2**, justifier que l'hypothèse de la cinétique d'ordre 1 est validée.

### **Partie B : Mesure de l'acidité libre d'un miel de châtaignier**

Le miel de châtaignier est majoritairement constitué de sucres (77 %) et d'eau (19 %) et son  $pH$  est égal à 4,5. Le principal acide présent dans le miel est l'acide gluconique dont la formule topologique est :



Par souci de simplification, on considèrera que l'acide gluconique est le seul acide présent dans le miel.

La teneur en acidité libre d'un miel s'exprime en milli-équivalents d'acide par kg de miel (mEq/kg) Elle correspond à la quantité de matière en mmol d'acide gluconique présent dans 1,0 kg de miel. Pour respecter la réglementation européenne, l'acidité libre d'un miel ne doit pas dépasser 50 mEq/kg.

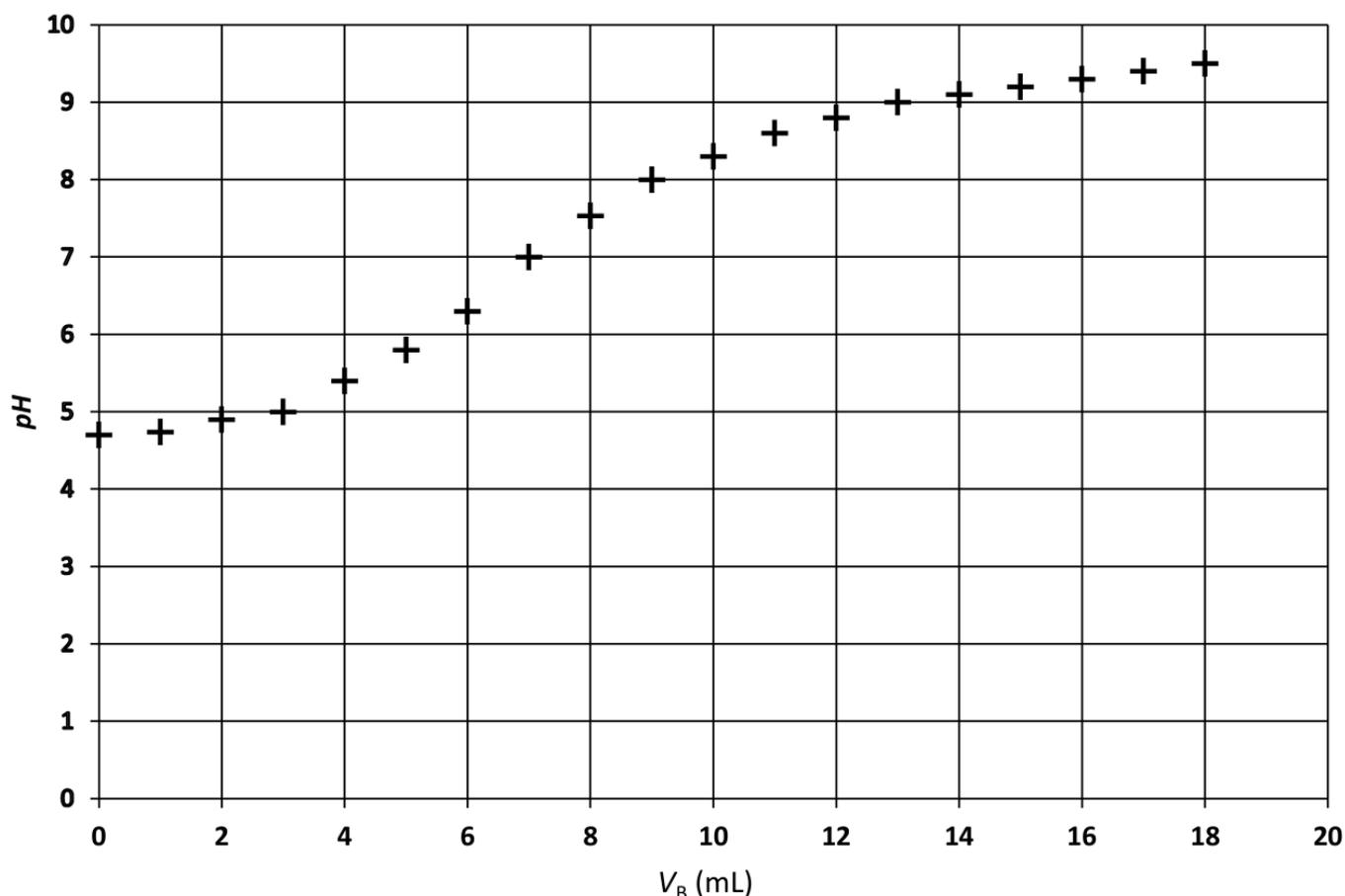
### Données :

- Couple acido-basique acide gluconique / ion gluconate :  
 $C_5H_{11}O_5COOH(aq) / C_5H_{11}O_5COO^-(aq)$
- Constante d'acidité du couple acide gluconique / ion gluconate en solution aqueuse à 25 °C :  
 $pK_a = 3,3$ .

### Protocole pour mesurer l'acidité libre du miel :

- Préparer un bécher avec 50,0 mL de solution aqueuse contenant 5,00 g de miel.
- Remplir la burette graduée avec la solution titrante d'hydroxyde de sodium ( $Na^+(aq) + HO^-(aq)$ ) de concentration  $C_B = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ .
- Placer la sonde  $pH$ -métrique dans le bécher et mettre en marche l'agitateur magnétique.
- Tracer la courbe représentant le  $pH$  en fonction du volume de la solution titrante.

On obtient le graphique suivant :



**Figure 3 :** Graphique représentant l'évolution du  $pH$  de la solution titrée en fonction du volume  $V_B$  de solution titrante versé.

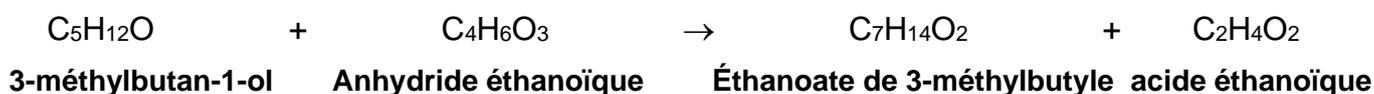
- B.1.** Donner la définition d'un acide selon Brönsted.
- B.2.** Si on considère que l'acide gluconique est le seul acide présent dans le miel, écrire l'équation de la réaction support du titrage.
- B.3.** Définir l'équivalence d'un titrage.
- B.4.** Déterminer si le miel de châtaignier respecte la réglementation européenne.

*Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter sa démarche. Toute démarche, même non aboutie, sera valorisée.*

### **Partie C : Phéromone d'attaque de l'abeille**

Pour transmettre un message chimique, les abeilles émettent des substances chimiques aux odeurs particulières, appelées phéromones. La phéromone d'attaque est l'éthanoate de 3-méthylbutyle qui est produite par des cellules bordant la poche à venin.

L'éthanoate de 3-méthylbutyle peut être synthétisé en laboratoire à partir du 3-méthylbutan-1-ol et de l'anhydride éthanoïque. La transformation chimique correspondante est modélisée par l'équation bilan ci-dessous :



**Protocole :** Pour obtenir l'éthanoate de 3-méthylbutyle, on chauffe à reflux un volume  $V_1 = 9,9$  mL de 3-méthylbutan-1-ol avec un volume  $V_2 = 8,6$  mL d'anhydride éthanoïque, en présence d'acide sulfurique. Après séparation et rinçage, on obtient une quantité de matière finale d'éthanoate de 3-méthylbutyle  $n_f = 7,4 \times 10^{-2}$  mol.

### **Données :**

| Espèces chimiques           | Masse molaire<br>(g · mol <sup>-1</sup> ) | Masse volumique $\rho$<br>(g · mL <sup>-1</sup> ) | Température d'ébullition<br>(°C) | Solubilité dans l'eau |
|-----------------------------|---|---|----------------------------------|-----------------------|
| 3-méthylbutan-1-ol          | 88,1                                      | 0,81  | 128                              | Très peu soluble      |
| Anhydride éthanoïque        | 102,1                                     | 1,08  | 139                              | Très soluble          |
| Éthanoate de 3-méthylbutyle | 130,2                                     | 0,87  | 142                              | Très peu soluble      |

- C.1.** Justifier le double intérêt du chauffage à reflux.
- C.2.** À l'aide du protocole et des données, vérifier que la quantité de matière initiale du 3-méthylbutan-1-ol est  $n_1 = 9,1 \times 10^{-2}$  mol et que la quantité de matière initiale d'anhydride éthanoïque est  $n_2 = 9,1 \times 10^{-2}$  mol.
- C.3.** Montrer que le rendement de la synthèse est d'environ 81 %.
- C.4.** Proposer une méthode permettant d'améliorer ce rendement.

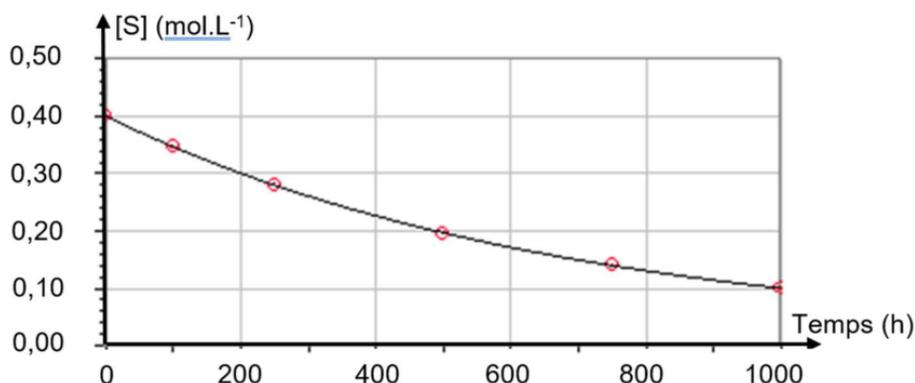
**Partie A : Du nectar au miel**

L'équation de la réaction d'hydrolyse est la suivante :



La température à l'intérieur de la ruche reste égale à 35 °C.

À température constante, à  $pH = 5$  constant, on mélange du saccharose avec de l'eau (sans invertase) et on suit l'évolution de la concentration du saccharose en fonction du temps. On obtient le graphique représenté sur la **figure 1**. [S] désigne la concentration en saccharose à l'instant  $t$  :



**Figure 1 :** Graphique représentant l'évolution de la concentration [S] en fonction du temps.

Source : [dlecorgnechimie.fr](http://dlecorgnechimie.fr)

**A.1. Justifier en quoi la transformation chimique peut être considérée comme lente.**

La figure 1 montre que la concentration en saccharose [S] diminue lentement. Au bout de 1000 h, la concentration [S] continue encore de diminuer. C'est bien une transformation lente.

**A.2. En utilisant la figure 1, déterminer la concentration initiale en saccharose [S]<sub>0</sub> ?**

On lit à la date  $t = 0$  h,  $[S]_0 = 0,40$  mol.L<sup>-1</sup>.

**A.3. Estimer, en expliquant la démarche, la valeur du temps de demi-réaction  $t_{1/2}$ .**

Au bout d'une durée égale au temps de demi-réaction, l'avancement a atteint la moitié de sa valeur finale. Le réactif limitant est donc à moitié consommé.

On cherche la date pour laquelle  $[S] = [S]_0/2$ .

On lit  $t_{1/2} = 500$  h.

**A.4. Définir la vitesse volumique de disparition  $v_{disp}$  du saccharose en fonction de la concentration en saccharose [S].**

$$v_{disp} = - \frac{d[S]}{dt}$$

La vitesse de disparition est égale à l'opposé de la dérivée de la concentration en réactif [S] par rapport au temps.

**A.5. Indiquer, en justifiant qualitativement, comment varie la vitesse de disparition du saccharose au cours du temps.**

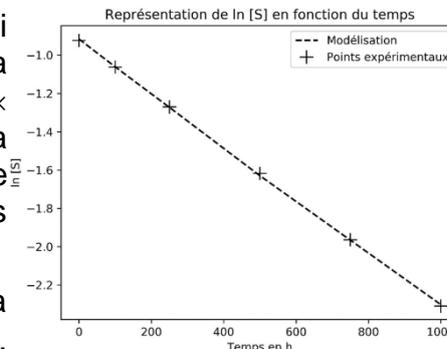
La dérivée de [S] par rapport au temps est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de [S].

La tangente est initialement très inclinée, la dérivée est très négative donc la vitesse qui lui est opposée est positive et très élevée.

Au cours du temps, la tangente devient moins pentue, la dérivée est moins négative, la vitesse diminue.

On fait l'hypothèse que l'hydrolyse du saccharose suit une loi de vitesse d'ordre 1. Dans ce cas, on montre que la concentration en saccharose  $[S]$  vérifie la relation  $\ln[S] = -k \times t + \ln[S]_0$  avec  $t$  le temps (en h),  $k$  la constante de vitesse à la température de l'expérience (en  $\text{h}^{-1}$ ) et  $\ln[S]_0$  le logarithme népérien de la concentration initiale en saccharose (sans unité).

Les valeurs de  $\ln[S]$  ont été calculées puis modélisées par la fonction  $\ln[S] = -k \times t + \ln[S]_0$  à l'aide d'un programme Python. On obtient alors le graphique représenté sur la **figure 2**.



**Figure 2 :** Graphique représentant les données expérimentales et la modélisation

**A.6. À partir de la modélisation représentée sur la figure 2, justifier que l'hypothèse de la cinétique d'ordre 1 est validée.**

Dans l'hypothèse d'une cinétique d'ordre 1, on nous indique que  $\ln[S] = -k \times t + \ln[S]_0$ .

$\ln[S]$  est donc modélisée par une fonction affine du temps.

La représentation graphique de la figure 2 montre une droite de coefficient directeur négatif ce qui est bien accord avec ce modèle où le coefficient directeur est négatif et égal à  $-k$ .

**Partie B : Mesure de l'acidité libre d'un miel de châtaignier**

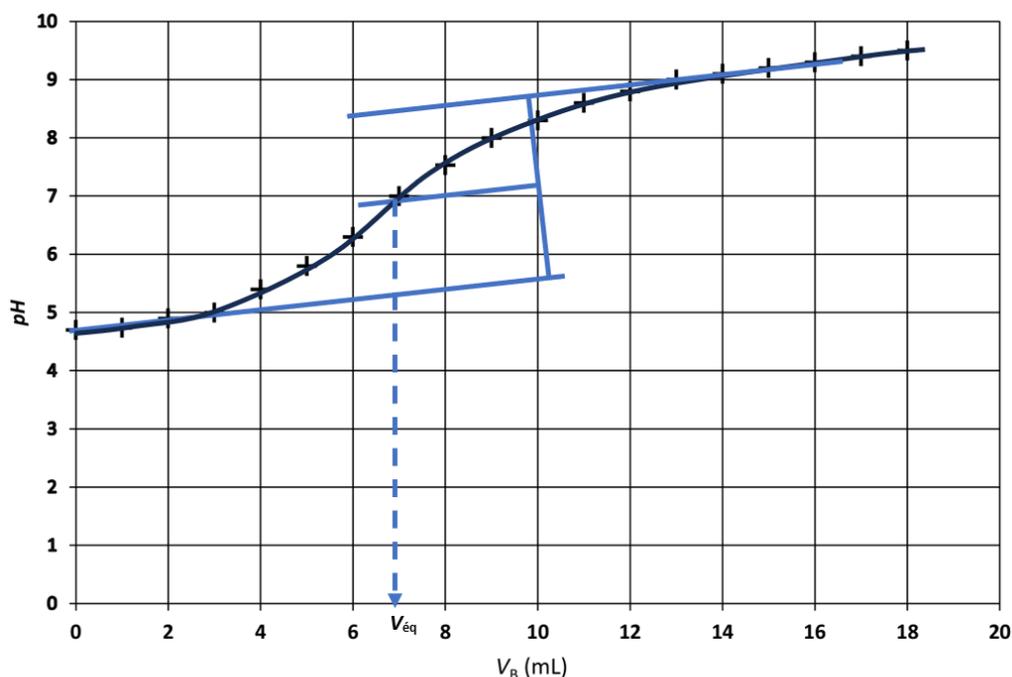
La teneur en acidité libre d'un miel s'exprime en milli-équivalents d'acide par kg de miel (mEq/kg) Elle correspond à la quantité de matière en mmol d'acide gluconique présent dans 1,0 kg de miel. Pour respecter la réglementation européenne, l'acidité libre d'un miel ne doit pas dépasser 50 mEq/kg.

**Données :**

- Couple acido-basique acide gluconique / ion gluconate :  
 $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{O}_5\text{COOH}(\text{aq}) / \text{C}_5\text{H}_{11}\text{O}_5\text{COO}^-(\text{aq})$

**Protocole pour mesurer l'acidité libre du miel :**

- Préparer un bécher avec 50,0 mL de solution aqueuse contenant 5,00 g de miel.
- Remplir la burette graduée avec la solution titrante d'hydroxyde de sodium ( $\text{Na}^+(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq})$ ) de concentration  $C_B = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Placer la sonde  $\text{pH}$ -métrique dans le bécher et mettre en marche l'agitateur magnétique.
- Tracer la courbe représentant le  $\text{pH}$  en fonction du volume de la solution titrante.

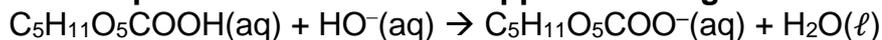


**Figure 3 :** Graphique représentant l'évolution du  $\text{pH}$  de la solution titrée en fonction du volume  $V_B$  de solution titrante versé.

### B.1. Donner la définition d'un acide selon Brönsted.

Selon Bronsted, un acide est une espèce chimique capable de céder un proton H<sup>+</sup>.

### B.2. Si on considère que l'acide gluconique est le seul acide présent dans le miel, écrire l'équation de la réaction support du titrage.



### B.3. Définir l'équivalence d'un titrage.

À l'équivalence, il y a changement de réactif limitant.

### B.4. Déterminer si le miel de châtaignier respecte la réglementation européenne.

**Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter sa démarche. Toute démarche, même non aboutie, sera valorisée.**

Pour respecter la réglementation européenne, l'acidité libre d'un miel ne doit pas dépasser 50 mEq/kg.

Elle correspond à la quantité de matière en mmol d'acide gluconique présent dans 1,0 kg de miel.

À l'aide du titrage déterminons la quantité de matière présente dans 5,0 g de miel.

À l'équivalence les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques

$$n_{\text{acide}}^{\text{initiale}} = n_{\text{HO}^-}^{\text{versée}}.$$

$$n_{\text{acide}}^{\text{initiale}} = C_B \cdot V_{\text{éq}}$$

À l'aide de la méthode des tangentes, on lit le volume équivalent  $V_{\text{éq}} = 7,0 \text{ mL}$ .

<http://acver.fr/tangentes>

$$n_{\text{acide}}^{\text{initiale}} = C_B \cdot V_{\text{éq}}$$

$$n_{\text{acide}}^{\text{initiale}} = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 7,0 \times 10^{-3} \text{ L} = 7,0 \times 10^{-5} \text{ mol} = 0,070 \text{ mmol dans } 5,0 \text{ g de miel}$$

Par proportionnalité, dans 1,0 kg, on aura 200 fois plus d'acide.

$$n_{\text{acide}} = 200 \times 0,070 = 14 \text{ mmol}$$

L'acidité libre de ce miel vaut donc  $14 \text{ mEq/kg} < 50 \text{ mEq/kg}$  donc ce miel respecte la législation européenne.

### Partie C : Phéromone d'attaque de l'abeille



**3-méthylbutan-1-ol Anhydride éthanoïque Éthanoate de 3-méthylbutyle acide éthanoïque**

**Protocole :** Pour obtenir l'éthanoate de 3-méthylbutyle, on chauffe à reflux un volume  $V_1 = 9,9 \text{ mL}$  de 3-méthylbutan-1-ol avec un volume  $V_2 = 8,6 \text{ mL}$  d'anhydride éthanoïque, en présence d'acide sulfurique. Après séparation et rinçage, on obtient une quantité de matière finale d'éthanoate de 3-méthylbutyle  $n_f = 7,4 \times 10^{-2} \text{ mol}$ .

#### Données :

| Espèces chimiques           | Masse molaire<br>(g · mol <sup>-1</sup> ) | Masse volumique $\rho$<br>(g · mL <sup>-1</sup> ) | Température d'ébullition<br>(°C) | Solubilité dans l'eau |
|-----------------------------|---|---|----------------------------------|-----------------------|
| 3-méthylbutan-1-ol          | 88,1                                      | 0,81  | 128                              | Très peu soluble      |
| Anhydride éthanoïque        | 102,1                                     | 1,08  | 139                              | Très soluble          |
| Éthanoate de 3-méthylbutyle | 130,2                                     | 0,87  | 142                              | Très peu soluble      |

### C.1. Justifier le double intérêt du chauffage à reflux.

Le chauffage à reflux permet d'augmenter la température qui est un facteur cinétique. Ainsi cela permet d'augmenter la vitesse de disparition des réactifs.

Par ailleurs, il empêche la perte de matière par vaporisation, car le réfrigérant permet de liquéfier les vapeurs qui retombent dans le milieu réactionnel.

**C.2. À l'aide du protocole et des données, vérifiez que la quantité de matière initiale du 3-méthylbutan-1-ol est  $n_1 = 9,1 \times 10^{-2}$  mol et que la quantité de matière initiale d'anhydride éthanóïque est  $n_2 = 9,1 \times 10^{-2}$  mol.**

Quantité de matière initiale du 3-méthylbutan-1-ol :

$$n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{\rho \cdot V_1}{M_1}$$

$$n_1 = \frac{0,81 \frac{\text{g}}{\text{mL}} \times 9,9 \text{ mL}}{88,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 9,1 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

Quantité de matière initiale d'anhydride éthanóïque

$$n_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{\rho \cdot V_2}{M_2}$$

$$n_2 = \frac{1,08 \frac{\text{g}}{\text{mL}} \times 8,6 \text{ mL}}{102,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 9,1 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

**C.3. Montrer que le rendement de la synthèse est d'environ 81 %.**

$$\eta = \frac{n_{\text{ester expérimentale}}}{n_{\text{ester théorique}}}$$

D'après l'équation de la transformation, il se forme autant d'ester que l'on a consommé d'alcool.

$$\eta = \frac{n_f}{n_1}$$

$$\eta = \frac{7,4 \times 10^{-2}}{9,1 \times 10^{-2}} = 0,81 = 81\%$$

**C.4. Proposer une méthode permettant d'améliorer ce rendement.**

On peut mettre un des deux réactifs en excès.

# Bac 2024 Métropole Jour 1

## Exercice 3 - Accéléromètre d'un mobile multifonction (6 points)

Les mobiles multifonctions, souvent appelés smartphones, sont équipés de plusieurs capteurs leur permettant d'être utilisés comme des instruments de mesure. Par exemple, la plupart des smartphones disposent d'un accéléromètre, capteur qui permet de mesurer l'accélération à laquelle le téléphone est soumis.



L'objectif de cet exercice est d'établir un modèle de la force de frottement s'exerçant sur un smartphone chutant dans l'air, à l'aide des mesures d'accélération fournies par l'accéléromètre embarqué.

### Données :

- masse du smartphone utilisé :  $m = 182 \text{ g}$  ;
- intensité de la pesanteur terrestre :  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;
- dans tout l'exercice, on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le smartphone.

Le mouvement du centre de masse G du smartphone est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère d'espace d'axe (Oz), vertical, orienté vers le haut et de vecteur unitaire  $\vec{k}$  (voir figure 1). À la date  $t = 0$ , le smartphone est lâché à plat, avec une vitesse initiale nulle. Son centre de masse G se trouve alors au point H de coordonnée  $z = h$ . Il est réceptionné quelques instants plus tard sur un coussin posé au sol. Lorsque le smartphone est en contact avec le coussin, son centre de masse est à l'altitude  $z = 0$ .

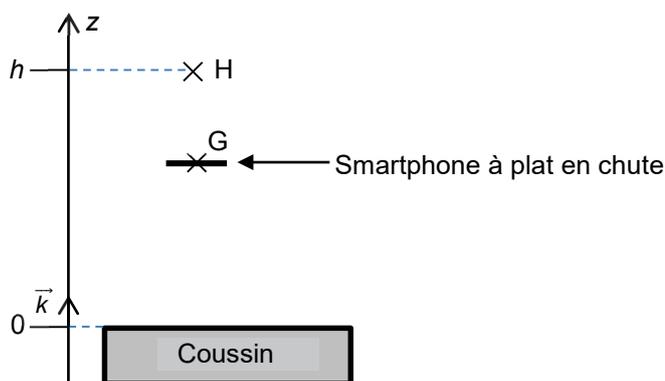


Figure 1. Modélisation de la chute du smartphone

### 1. Modèle de la chute libre sans frottement

On fait tout d'abord l'hypothèse que le smartphone est en mouvement de chute libre verticale. On ne tient donc pas compte des forces de frottement exercées par l'air sur le smartphone en mouvement.

**Q1.** Dans ce modèle, faire un bilan des forces appliquées au système {smartphone}. En déduire l'expression de la coordonnée  $a_z$  de l'accélération du centre de masse G du système.

**Q2.** Établir l'expression de la coordonnée  $v_z(t)$  de la vitesse du centre de masse G du système puis montrer que l'équation horaire de l'altitude  $z(t)$  du centre de masse G a pour expression :

$$z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h$$

On choisit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{PP}(z)$  au niveau de l'origine de l'axe (Oz) :  $E_{PP}(z = 0) = 0$ .

**Q3.** Justifier que l'énergie mécanique  $E_M$  du smartphone est constante et qu'elle a pour expression :  $E_M = m \cdot g \cdot h$ .

## 2. Étude expérimentale de la chute du smartphone

Pour confronter le modèle de chute libre sans frottement à l'expérience, on lâche à la date  $t = 0$  un téléphone équipé d'un accéléromètre, avec une vitesse initiale nulle depuis la hauteur  $h = 1,70$  m. La figure 2 est obtenue à partir des valeurs de l'accélération enregistrées par le capteur entre le lâcher du téléphone et la date  $t = 0,47$  s.

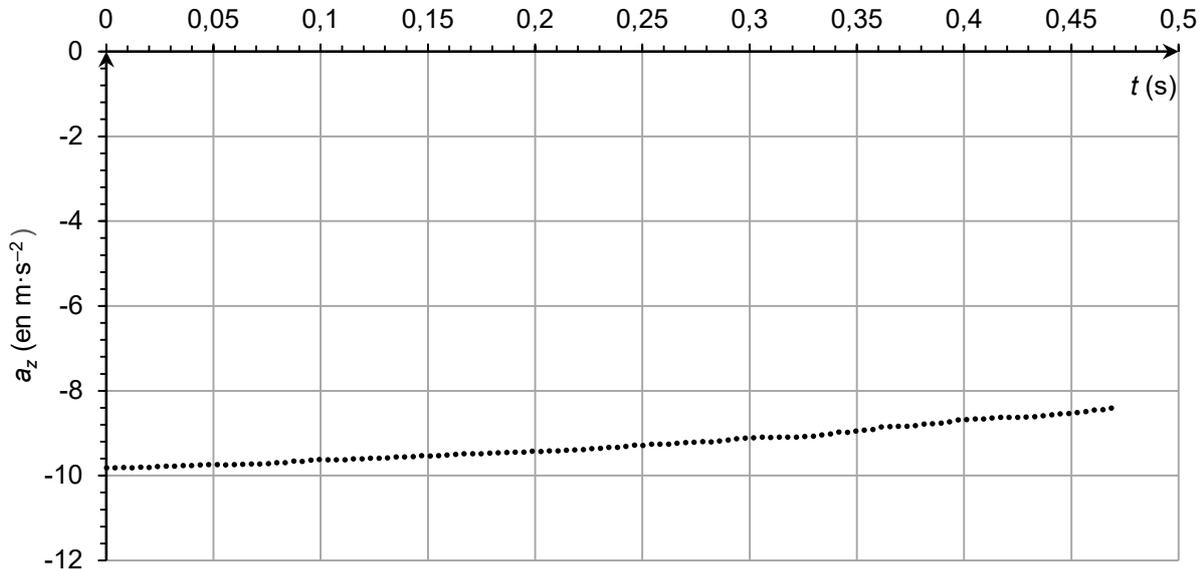


Figure 2. Accélération verticale  $a_z$  du smartphone en fonction du temps  $t$

**Q4.** Indiquer, en justifiant, si l'évolution temporelle de la valeur de la composante  $a_z$  de l'accélération obtenue expérimentalement est compatible avec le modèle de chute libre sans frottement.

Le traitement des données acquises permet de tracer l'évolution temporelle de trois formes d'énergies du smartphone : énergie potentielle de pesanteur  $E_{PP}(t)$ , énergie cinétique  $E_C(t)$  et énergie mécanique  $E_M(t)$ , comme représenté sur la figure 3.

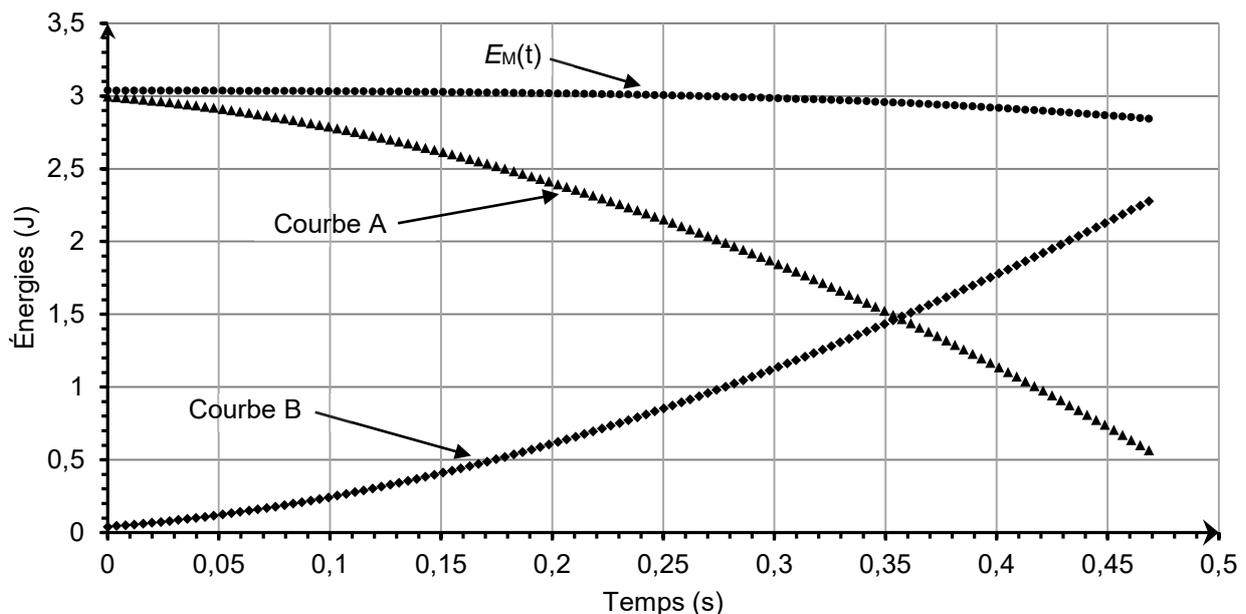


Figure 3. Représentations graphiques de  $E_{PP}(t)$ ,  $E_C(t)$  et  $E_M(t)$  lors de la chute du smartphone

**Q5.** Associer, en justifiant, chaque courbe d'évolution temporelle A et B de la figure 3 à la forme d'énergie correspondante.

**Q6.** Montrer, à partir de la figure 3, que la vitesse du smartphone est proche de  $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  à la date  $t = 0,45 \text{ s}$ .

Les actions de frottement de l'air sur le smartphone sont représentées par une force  $\vec{f}$  verticale et dirigée vers le haut. Cette force est nulle lorsque la vitesse du smartphone est nulle.

**Q7.** En appliquant la deuxième loi de Newton au système {smartphone}, montrer que la coordonnée verticale de la force de frottement vérifie :

$$f = m \cdot (a_z + g)$$

Les données expérimentales permettent de représenter les variations de la composante verticale de l'accélération  $a_z$  du smartphone en fonction du carré  $v^2$  de sa vitesse. Les résultats sont représentés sur la figure 4. Les données expérimentales sont correctement représentées par une modélisation affine :

$$a_z = 0,0555 \times v^2 - 9,80 \quad \text{où } a_z \text{ est exprimée en } \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \text{ et } v \text{ en } \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

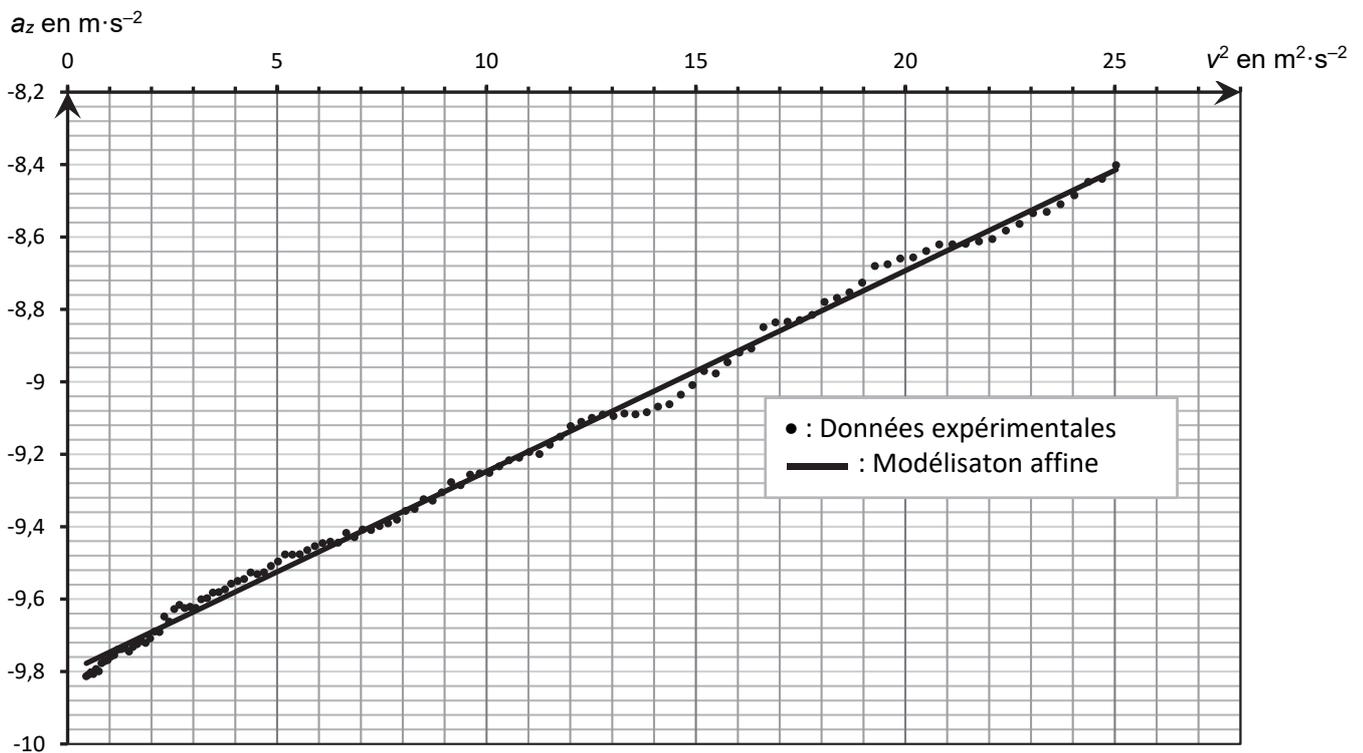


Figure 4. Modélisation de la représentation de  $a_z$  en fonction de  $v^2$

**Q8.** Déterminer la valeur expérimentale de l'intensité de la pesanteur  $g$  que l'on peut déduire de cette expérience.

**Q9.** Montrer que l'on peut déduire de ces résultats que la force de frottement exercée par l'air peut s'écrire  $f = k \cdot v^2$  où  $k$  est un coefficient dont on donnera la valeur et l'unité.

**Q10.** Calculer la valeur  $f$  de la force de frottement en fin de chute. Comparer cette valeur à celle du poids du smartphone et commenter.

## 1. Modèle de la chute libre sans frottement

**Q1.** Système {smartphone} de masse  $m$  et de centre de masse G.

Référentiel terrestre supposé galiléen

Repère d'étude  $(O, \vec{k})$  d'axe Oz vertical orienté vers le haut.

Dans le cas d'une chute libre, le smartphone n'est soumis qu'à son poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Deuxième loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  soit  $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$

donc  $\vec{a} = \vec{g}$ .

En projection selon l'axe vertical Oz orienté vers le haut :  $a_z = g_z = -g$ .

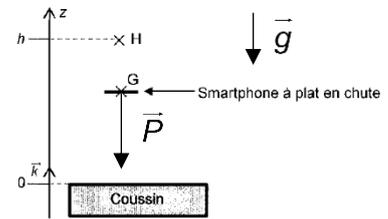


Figure 1. Modélisation de la chute du smartphone

**Q2.** On a :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  soit en projection selon l'axe Oz :  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$ .

En primitivant :  $v_z(t) = -g \cdot t + C_1$

Le smartphone est lâché initialement sans vitesse initiale donc  $v_z(0) = 0$  soit  $-0 + C_1 = 0$ .

Finalement :  $v_z(t) = -g \cdot t$

On a :  $\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}$  soit en projection selon l'axe Oz :  $v_z = \frac{dz}{dt} = -g \cdot t$ .

En primitivant :  $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + C_2$

Le smartphone est lâché initialement d'une altitude  $z(0) = h$  donc  $-0 + C_2 = h$ .

Finalement :  $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h$

**Q3.** Dans le cas d'une chute libre, il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. L'énergie mécanique est donc constante et s'écrit :

$$E_M = E_C + E_{PP}$$

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + m \cdot g \cdot z$$

Pour  $z = h$ , la vitesse du smartphone est nulle ainsi :

$$E_M = m \cdot g \cdot h$$

## 2. Étude expérimentale de la chute du smartphone

**Q4.** Dans le modèle de la chute libre :  $a_z = -g$ . La coordonnée  $a_z$  de l'accélération est donc constante au cours du temps.

Or la figure 2 montre que la coordonnée  $a_z$  varie au cours du temps donc le modèle de la chute libre n'est compatible avec l'expérience.

**Q5.** La courbe A correspond à une énergie décroissante au cours du temps : elle correspond à l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{PP}$  qui diminue car l'altitude du smartphone diminue au cours de la chute verticale.

La courbe B correspond à une énergie croissante au cours du temps : elle correspond à l'énergie cinétique  $E_C$  qui augmente car la valeur de la vitesse du smartphone augmente lors de la chute verticale.

Q6. Pour  $t = 0,45 \text{ s}$  :  $E_c \approx 2,1 \text{ J}$  et  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  soit  $v^2 = \frac{2E_c}{m}$  donc  $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$ .

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 2,1}{182 \times 10^{-3}}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ valeur proche de } 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \sqrt{\frac{2 \times 2,1}{182 \times 10^{-3}}}$$

4.803844614

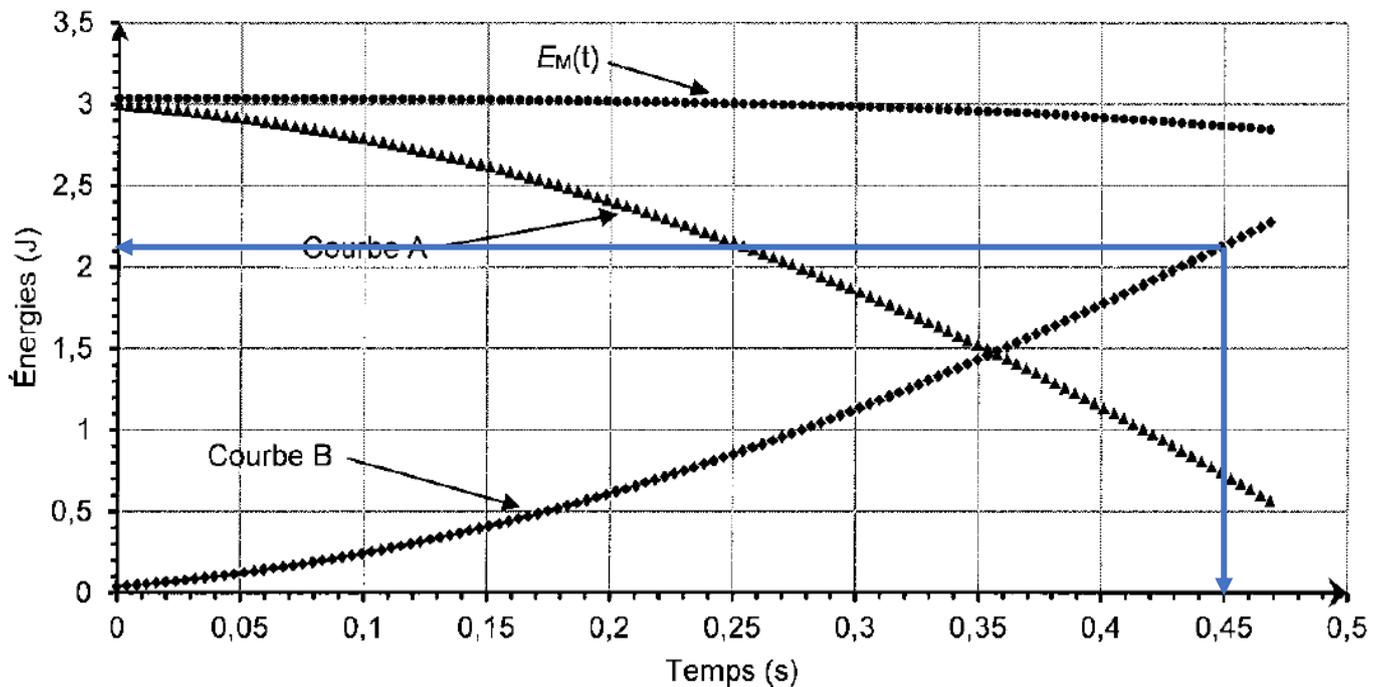


Figure 3. Représentations graphiques de  $E_{PP}(t)$ ,  $E_c(t)$  et  $E_M(t)$  lors de la chute du smartphone

Q7. Système {smartphone} de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ .

Référentiel terrestre supposé galiléen

Repère d'étude  $(O, \vec{k})$  d'axe  $Oz$  vertical orienté vers le haut.

Bilan des forces :

Poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Force de frottement :  $\vec{f} = f \cdot \vec{k}$  (verticale dirigée vers le haut).

Deuxième loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$  soit  $m \cdot \vec{g} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

En projection selon l'axe vertical  $Oz$  orienté vers le haut :  $m \cdot g_z + f_z = m \cdot a_z$

$$\text{Soit : } -m \cdot g + f = m \cdot a_z \quad (f_z = f > 0)$$

$$f = m \cdot a_z + m \cdot g$$

$$f = m \cdot (a_z + g)$$

Q8. Lorsque la vitesse du smartphone est nulle la valeur de la force de frottement est nulle et  $a_z = -g$ .

Or, d'après la modélisation :  $a_z = 0,0555 \times v^2 - 9,80$

Donc pour une vitesse nulle :  $a_z = -9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -g$

Ainsi :  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

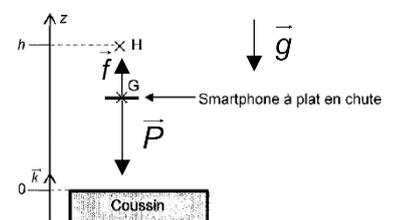


Figure 1. Modélisation de la chute du smartphone

**Q9.** On reporte l'expression de la modélisation de  $a_z$  dans celle de  $f$  :

$$f = m \cdot (a_z + g)$$

$$f = m \cdot (0,0555 \times v^2 - 9,80 + g)$$

$$\text{avec } g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$f = 0,0555 \times m \cdot v^2 + 0,01$$

On néglige la valeur 0,01 et alors  $f$  est bien de la forme :  $f = k \cdot v^2$  avec  $k = 0,0555 \times m$ .

Unités de  $k$  :

$$\text{On a : } k = \frac{f}{v^2}.$$

Une force s'exprime en newton  $N = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  ( $F = m \cdot a$ )

$$\text{donc } k \text{ s'exprime } \frac{N}{(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Valeur de  $k$  :

$$k = 0,0555 \times m = 0,0555 \times 182 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1} = 1,01 \times 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}.$$

**Q10.** En fin de chute, lorsque la vitesse est maximale, on a graphiquement, sur la figure 4  $v^2 = 25 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ .

$$f = k \cdot v^2 = 1,01 \times 10^{-2} \times 25 \text{ N} \approx 0,25 \text{ N}.$$

$$P = m \cdot g = 182 \times 10^{-3} \times 9,80 \text{ N} \approx 1,78 \text{ N}.$$

La force de frottement est nettement inférieure au poids du smartphone lors de la chute.

Elle n'est cependant pas négligeable face au poids.

|               |          |
|---------------|----------|
| 0.0555*182E-3 | 0.010101 |
| Rep*25        | 0.252525 |
| 182E-3*9.80   | 1.7836   |

Si vous remarquez une erreur, merci de nous écrire à [labolycee@labolycee.org](mailto:labolycee@labolycee.org).

## EXERCICE 3 - IMPRIMANTE À JET D'ENCRE CONTINU (5 points)

De nombreuses applications technologiques, dans des domaines très variés, reposent sur l'utilisation d'un champ électrique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement des imprimantes à jet d'encre continu dévié, principalement utilisées pour imprimer les dates d'expiration figurant sur les produits alimentaires.



D'après le site [domino-printing.com](http://domino-printing.com)

On donne sur le schéma de la figure 1, le principe de fonctionnement de l'imprimante à jet d'encre continu dévié : le jet d'encre sort de la tête d'impression par une buse qui le décompose en très petites gouttes dont certaines sont chargées électriquement.

Celles-ci passent sous un déflecteur constitué de deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  parallèles, chargées électriquement, assimilables à un condensateur plan. Ces plaques dévient les gouttes chargées de leur trajectoire initiale.

Les gouttes non chargées poursuivent quant à elles leur mouvement rectiligne vers une gouttière de recyclage et sont réintégrées dans le module d'encre afin d'être réutilisées.

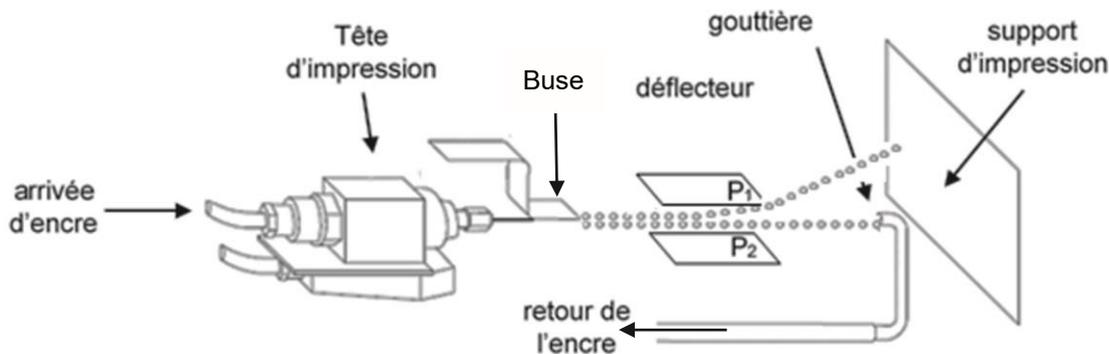


Figure 1. Schéma de principe de l'imprimante à jet d'encre continu dévié (d'après le site [timis.fr](http://timis.fr))

## Données :

- les mouvements sont étudiés dans le référentiel terrestre supposé galiléen associé au repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  représentés sur la figure 2. Les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont unitaires ;
- on considère que la charge électrique et la masse des gouttes d'encre restent constantes entre la buse et le support d'impression ;
- masse d'une goutte d'encre :  $m = 2 \times 10^{-10}$  kg ;
- charge électrique d'une goutte :  $q = -4 \times 10^{-13}$  C ;
- valeur de la vitesse d'éjection des gouttes d'encre :  $v_0 = 20$  m·s<sup>-1</sup> ;
- longueur des plaques du déflecteur :  $L = 2$  cm ;
- distance entre le déflecteur et le support d'impression :  $D = 3$  cm ;
- le champ électrique est supposé uniforme dans le déflecteur, il s'écrit  $\vec{E} = -E \cdot \vec{k}$  avec  $E = 9 \times 10^5$  V·m<sup>-1</sup> ;
- le champ électrique est nul à l'extérieur du déflecteur ;
- hauteur moyenne d'un caractère imprimé :  $h = 3$  mm ;
- intensité de la pesanteur :  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>.

On étudie le mouvement d'une goutte d'encre G, supposée ponctuelle, de masse  $m$  et de charge  $q$  négative.

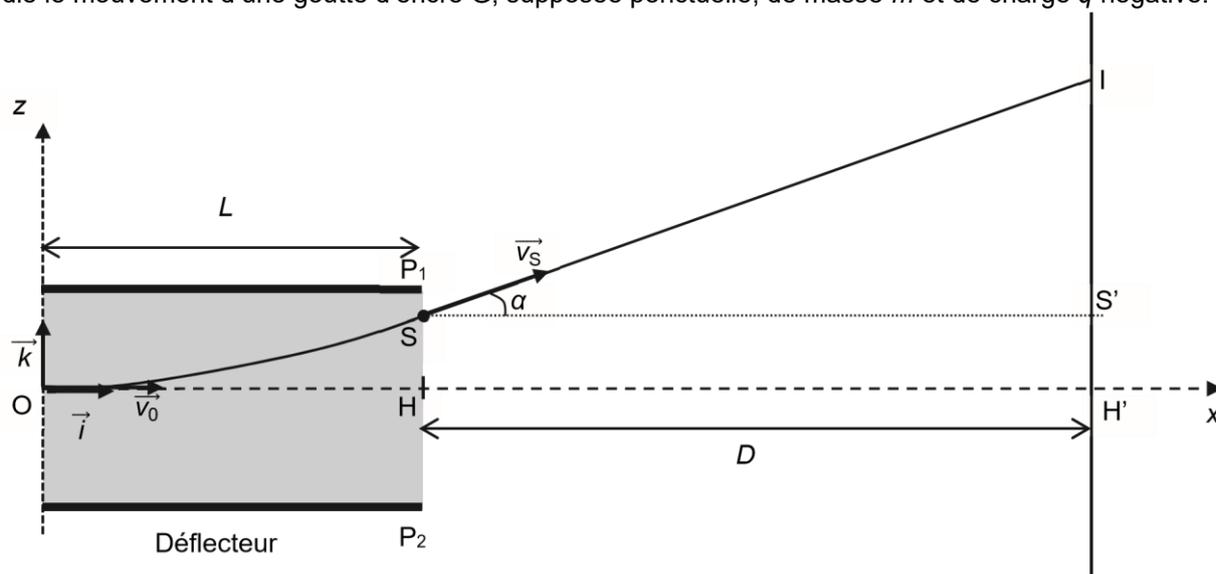


Figure 2. Schéma de la trajectoire de la goutte G

À la date  $t_0 = 0$  s, la goutte d'encre G pénètre dans la zone de champ électrique uniforme au niveau du point O avec une vitesse initiale notée  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$ .

On suppose que l'action mécanique de l'air est négligeable devant les autres actions.

**Q1.** Indiquer les signes des charges portées par les plaques  $P_1$  et  $P_2$  sachant que la goutte chargée négativement est déviée vers le haut (sens des  $z$  croissants) puis justifier que le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  est orienté de  $P_1$  vers  $P_2$ .

On suppose que la valeur du poids de la goutte d'encre G est négligeable par rapport à celle de la force électrique subie dans le déflecteur.

**Q2.** Établir l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}_G$  de la goutte d'encre en fonction de la masse  $m$ , de la charge  $q$  et du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  entre les plaques du déflecteur.

**Q3.** Montrer que les équations horaires  $x_G(t)$  et  $z_G(t)$  du mouvement de la position de la goutte d'encre G dans le déflecteur sont données par les relations :

$$\begin{cases} x_G(t) = v_0 \cdot t \\ z_G(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot t^2 \end{cases}$$

**Q4.** Exprimer la date  $t_s$  à laquelle la goutte d'encre G sort du déflecteur puis montrer que la valeur de la déviation HS est d'environ 0,9 mm.

**Q5.** Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}_s$  de la goutte d'encre G à la date  $t_s$ .

**Q6.** Montrer que la valeur de l'angle  $\alpha$  entre l'axe (Ox) et le vecteur vitesse  $\vec{v}_s$  est donnée par la relation :

$$\tan \alpha = -\frac{q \cdot E \cdot L}{m \cdot v_0^2}$$

On suppose que le mouvement de la goutte entre le point S et le support d'impression est rectiligne uniforme.

**Q7.** En déduire la valeur de la hauteur H'I du point d'impact I de la goutte sur le support d'impression. Commenter.

**Q8.** Proposer, en justifiant, plusieurs moyens permettant d'augmenter la taille du caractère imprimé sur le support d'impression.

## EXERCICE 3 - IMPRIMANTE À JET D'ENCRE CONTINU (5 points)

De nombreuses applications technologiques, dans des domaines très variés, reposent sur l'utilisation d'un champ électrique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement des imprimantes à jet d'encre continu dévié, principalement utilisées pour imprimer les dates d'expiration figurant sur les produits alimentaires.



D'après le site [domino-printing.com](http://domino-printing.com)

On donne sur le schéma de la figure 1, le principe de fonctionnement de l'imprimante à jet d'encre continu dévié : le jet d'encre sort de la tête d'impression par une buse qui le décompose en très petites gouttes dont certaines sont chargées électriquement.

Celles-ci passent sous un déflecteur constitué de deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  parallèles, chargées électriquement, assimilables à un condensateur plan. Ces plaques dévient les gouttes chargées de leur trajectoire initiale.

Les gouttes non chargées poursuivent quant à elles leur mouvement rectiligne vers une gouttière de recyclage et sont réintégrées dans le module d'encre afin d'être réutilisées.

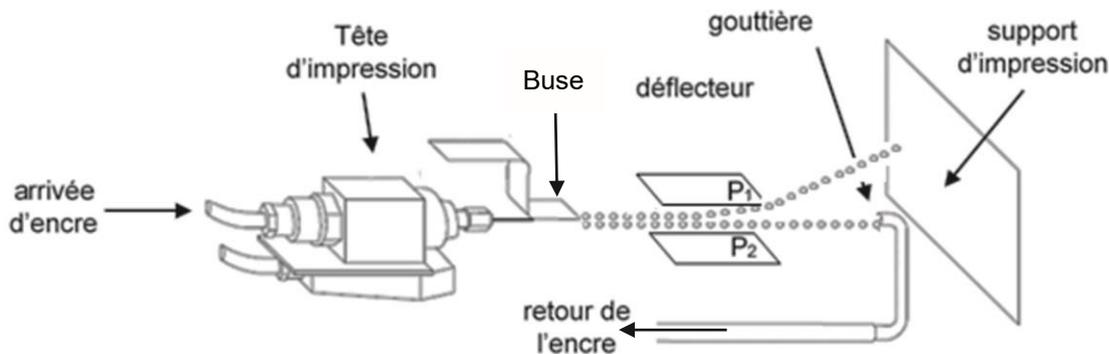


Figure 1. Schéma de principe de l'imprimante à jet d'encre continu dévié (d'après le site [timis.fr](http://timis.fr))

### Données :

- les mouvements sont étudiés dans le référentiel terrestre supposé galiléen associé au repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  représentés sur la figure 2. Les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont unitaires ;
- on considère que la charge électrique et la masse des gouttes d'encre restent constantes entre la buse et le support d'impression ;
- masse d'une goutte d'encre :  $m = 2 \times 10^{-10}$  kg ;
- charge électrique d'une goutte :  $q = -4 \times 10^{-13}$  C ;
- valeur de la vitesse d'éjection des gouttes d'encre :  $v_0 = 20$  m·s<sup>-1</sup> ;
- longueur des plaques du déflecteur :  $L = 2$  cm ;
- distance entre le déflecteur et le support d'impression :  $D = 3$  cm ;
- le champ électrique est supposé uniforme dans le déflecteur, il s'écrit  $\vec{E} = -E \cdot \vec{k}$  avec  $E = 9 \times 10^5$  V·m<sup>-1</sup> ;
- le champ électrique est nul à l'extérieur du déflecteur ;
- hauteur moyenne d'un caractère imprimé :  $h = 3$  mm ;
- intensité de la pesanteur :  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>.

On étudie le mouvement d'une goutte d'encre G, supposée ponctuelle, de masse  $m$  et de charge  $q$  négative.

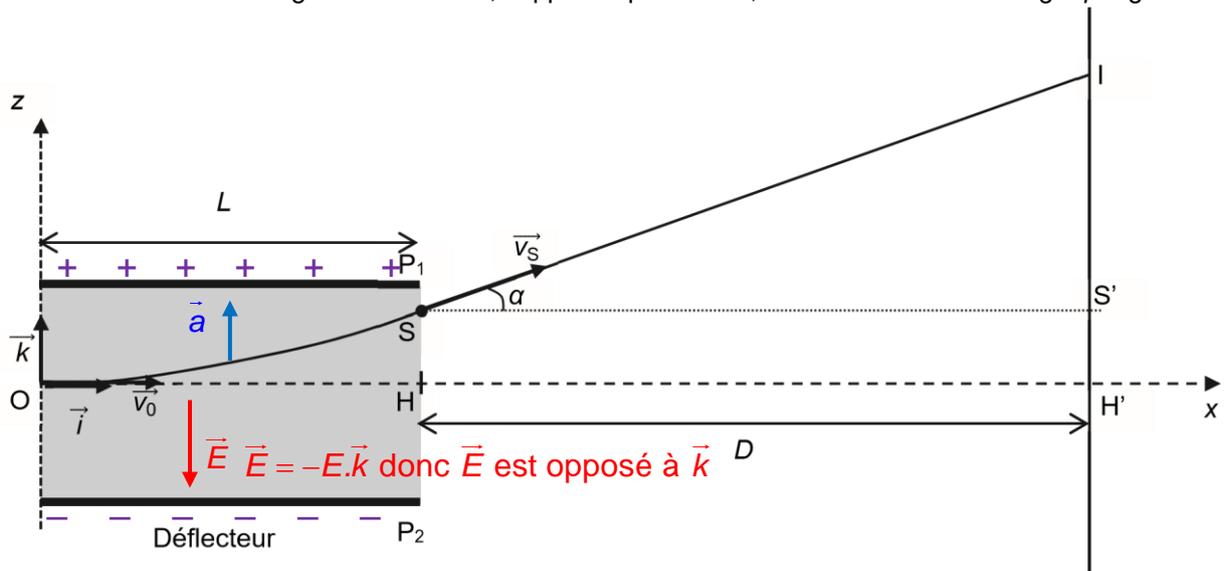


Figure 2. Schéma de la trajectoire de la goutte G

À la date  $t_0 = 0$  s, la goutte d'encre G pénètre dans la zone de champ électrique uniforme au niveau du point O avec une vitesse initiale notée  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{i}$ .

On suppose que l'action mécanique de l'air est négligeable devant les autres actions.

**Q1. Indiquer les signes des charges portées par les plaques P1 et P2 sachant que la goutte chargée négativement est déviée vers le haut (sens des z croissants) puis justifier que le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  est orienté de P1 vers P2.**

La goutte porte une charge négative et elle est attirée vers la plaque P1 située en haut, donc la plaque P1 porte des charges de signe positif.

Le vecteur  $\vec{E}$  est toujours orienté vers la plaque chargée négativement, donc la plaque P2 porte des charges négatives, et la plaque P1 porte des charges positives. (autre possibilité :  $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$  avec  $q < 0$  donc  $\vec{F}_e$  et  $\vec{E}$  sont opposés.  $\vec{F}_e$  est orientée vers le P1 donc  $\vec{E}$  est orienté vers P2 ou encore  $\vec{E} = -E \cdot \vec{k}$  donc  $\vec{E}$  est opposé à  $\vec{k}$ )

**On suppose que la valeur du poids de la goutte d'encre G est négligeable par rapport à celle de la force électrique subie dans le déflecteur.**

**Q2. Établir l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}_G$  de la goutte d'encre en fonction de la masse  $m$ , de la charge  $q$  et du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  entre les plaques du déflecteur.**

On applique la deuxième loi de Newton au système {goutte} dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$$

La force électrostatique prédomine sur les autres forces, alors  $\vec{F}_e = m \cdot \vec{a}_G$ .

$$q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Comme  $q < 0$ , le vecteur  $\vec{a}_G$  et le vecteur  $\vec{E}$  ont des sens opposés. Conseil : dessiner ces vecteurs sur la figure 2.

**Q3. Montrer que les équations horaires  $x_G(t)$  et  $z_G(t)$  du mouvement de la position de la goutte d'encre G dans**

**le déflecteur sont données par les relations :**

$$\begin{cases} x_G(t) = v_0 \cdot t \\ z_G(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot t^2 \end{cases}$$

En projection du vecteur  $\vec{a}_G$  selon les axes Ox et Oz du repère et compte tenu du sens du vecteur  $\vec{E}$  et du signe négatif de  $q$  il vient :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_{Gx} = 0 \\ a_{Gz} = -\frac{q}{m} \cdot E > 0 \end{cases}$$

Pourquoi ce signe - pour  $a_{Gz}$  ?

D'après la 2<sup>e</sup> loi de Newton  $\vec{a}$  et  $\vec{F}_e$  ont même sens et même direction.

Alors il faut que  $a_{Gz} > 0$  avec  $q < 0$  il faut ajouter ce -.

Autre explication :  $a_{Gz} = q/m \cdot E_z$  or  $E_z = -E$  alors  $a_{Gz} = -q/m \cdot E$ .

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} \text{ donc } a_{Gx} = \frac{dv_{Gx}(t)}{dt} \text{ et } a_{Gz} = \frac{dv_{Gz}(t)}{dt}$$

Ainsi en primitivant on obtient  $\vec{v}_G \begin{cases} v_{Gx}(t) = Cte_1 \\ v_{Gz}(t) = -\frac{q.E}{m}.t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  :  $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$  on a :

$$v_0 = Cte_1$$

$$0 = 0 + Cte_2$$

Finalement :  $\vec{v}_G \begin{cases} v_{Gx}(t) = v_0 \\ v_{Gz}(t) = -\frac{q.E}{m}.t \end{cases}$

À chaque instant  $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$  donc  $v_{Gx} = \frac{dx_G(t)}{dt}$  et  $v_z = \frac{dz_G(t)}{dt}$

En primitivant on obtient  $\vec{OG} \begin{cases} x_G(t) = v_0.t + Cte_3 \\ z_G(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m}.t^2 + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à  $t = 0$  s, la goutte est au point de coordonnées  $O(x_G(0) = 0; z_G(0) = 0)$  donc :

$$0 = 0 + Cte_3$$

$$0 = 0 + 0 + Cte_4$$

Finalement, on obtient les équations horaires  $\vec{OG} \begin{cases} x_G(t) = v_0.t \\ z_G(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m}.t^2 \end{cases}$

**Q4. Exprimer la date  $t_s$  à laquelle la goutte d'encre G sort du déflecteur puis montrer que la valeur de la déviation HS est d'environ 0,9 mm.**

Lorsque la goutte sort du déflecteur alors son abscisse  $x_G = L$ .

$$L = v_0.t_s \text{ donc } t_s = \frac{L}{v_0}$$

La déviation HS =  $z_G(t_s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m}.t_s^2$

$$z_G(t_s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m} \cdot \left(\frac{L}{v_0}\right)^2$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} * \frac{(-4E-13) * 9E5}{2E-10} * \left(\frac{2E-2}{20}\right)^2 = 9E-4}$$

$$HS = z_G(t_s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-4 \times 10^{-13}) \times 9 \times 10^5}{2 \times 10^{-10}} \times \left(\frac{2 \times 10^{-2}}{20}\right)^2 = 9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,9 \text{ mm}$$

**Q5. Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}_s$  de la goutte d'encre G à la date  $t_s$ .**

$$\vec{v}_s \begin{cases} v_{sx}(t_s) = v_0 \\ v_{sz}(t_s) = -\frac{q.E}{m}.t_s \end{cases}$$

**Q6. Montrer que la valeur de l'angle  $\alpha$  entre l'axe (Ox) et le vecteur vitesse  $\vec{v}_S$  est donnée par la relation :**

$$\tan \alpha = -\frac{q.E.L}{m.v_0^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{v_{sz}(t_s)}{v_{sx}(t_s)} = \frac{-\frac{q}{m}.E.t_s}{v_0} = -\frac{q}{m.v_0}.E.t_s$$

On a vu en Q4 que  $t_s = \frac{L}{v_0}$ , donc  $\tan \alpha = -\frac{q}{m.v_0}.E.\frac{L}{v_0} = -\frac{q.E.L}{m.v_0^2}$

**On suppose que le mouvement de la goutte entre le point S et le support d'impression est rectiligne uniforme.**

**Q7. En déduire la valeur de la hauteur H'I du point d'impact I de la goutte sur le support d'impression. Commenter.**

Dans le triangle rectangle SIS' rectangle en S', on a  $\tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{S'I}{SS'}$ .

$$S'I = \tan \alpha . SS'$$

$$S'I = \tan \alpha . D$$

$$H'I = H'S + S'I$$

$$H'I = HS + S'I$$

$$H'I = HS + \tan \alpha . D$$

$$H'I = HS - \frac{q.E.L}{m.v_0^2} . D$$

$$H'I = 0,9 \times 10^{-3} - \frac{(-4 \times 10^{-13}) \times 9 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-10} \times 20^2} \times 3 \times 10^{-2}$$

$$\frac{(-4E-13) * 9E5 * 2E-2}{2E-10 * 20^2} * 3E-2 = -2.7E-3$$

$$H'I = 0,9 \times 10^{-3} - (-2,7 \times 10^{-3}) = 3,6 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,6 \text{ mm}$$

Commenter : L'énoncé indique que la hauteur moyenne des caractères est de 3 mm, donc cette valeur de 3,6 mm qui en est proche est en accord.

**Q8. Proposer, en justifiant, plusieurs moyens permettant d'augmenter la taille du caractère imprimé sur le support d'impression.**

Il faut que H'I soit la plus grande possible.

$$H'I = HS - \frac{q.E.L}{m.v_0^2} . D \text{ avec } HS = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m} \cdot \left(\frac{L}{v_0}\right)^2$$

$$H'I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m} \cdot \left(\frac{L}{v_0}\right)^2 - \frac{q.E.L}{m.v_0^2} . D$$

$$H'I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m} \cdot \frac{L^2}{v_0^2} - \frac{q.E.L}{m.v_0^2} . D$$

$$H'I = -\frac{q.E.L}{m.v_0^2} \cdot \left(\frac{1}{2} . L + D\right)$$

À l'aide de cette formule, on peut voir les paramètres qui influent sur H'I.

On peut augmenter L et/ou D et/ou E et/ou q.

On ne peut pas modifier la masse m de la goutte.

On peut diminuer la vitesse d'injection  $v_0$  de la goutte.

Remarque : On demande plusieurs moyens, mais la réponse semble en réalité plus complexe.

En effet on ne doit pas trop augmenter HS, sinon la goutte risque de toucher la plaque P1.

Donc il ne faut pas augmenter ni E, ni L, ni q qui modifient à la fois HS et H'I.

On peut seulement augmenter  $D$  qui ne modifie pas HS mais augmente H'I.

De tout temps, l'Homme a cherché à mesurer ce qui l'entoure de l'infiniment petit à l'infiniment grand. Il a donc dû mettre en place des protocoles de mesure indirecte pour accéder aux dimensions des objets hors de sa portée.

L'objectif de cet exercice est de mesurer la masse de la Terre par deux méthodes.

### Mesure de la masse de la Terre à l'aide d'un satellite.

On étudie le mouvement du centre de masse  $A$  d'un satellite, dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen. Ce satellite est situé à une distance  $r = OA$  par rapport au centre  $O$  de la Terre.

On fait l'approximation, dans un premier temps, que le mouvement du satellite est circulaire uniforme et on considère que la seule force qui s'applique sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{T/A}$  exercée par la Terre, de masse  $M_T$  sur le satellite, de masse  $m$ .

Le repère de Frenet  $(A, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$  est représenté figure 1.

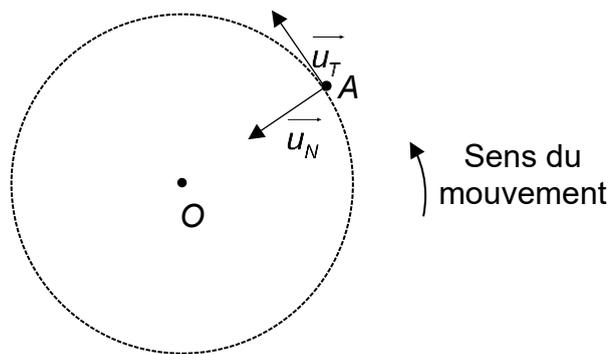


Figure 1. Mouvement circulaire uniforme d'un satellite  $A$  centré sur  $O$ .

**Q1.** Reproduire la figure 1 sur votre copie et représenter sans souci d'échelle, la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{T/A}$  exercée par la Terre sur le satellite.

On note  $G$  la constante de gravitation universelle.

**Q2.** Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle  $\vec{F}_{T/A}$  en fonction du vecteur unitaire  $\vec{u}_N$ , de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$  et  $r$ .

**Q3.** En appliquant la deuxième loi de Newton au centre de masse  $A$  du satellite, établir que sa vitesse a pour expression  $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$ .

**Q4.** À l'aide de l'expression littérale de la vitesse  $v$  du satellite et de la définition de la période de révolution  $T$  du satellite autour de la Terre, vérifier que l'expression de la troisième loi de Kepler est :  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$ .

Astérix, le premier satellite artificiel français, a été lancé le 26 novembre 1965, la France devient alors la troisième puissance spatiale mondiale.

On considère que le satellite Astérix  $A$  parcourt une trajectoire elliptique autour de la Terre de centre  $O$ . Les points  $B$  et  $C$  symbolisent respectivement le périhélie et l'apogée de l'ellipse.

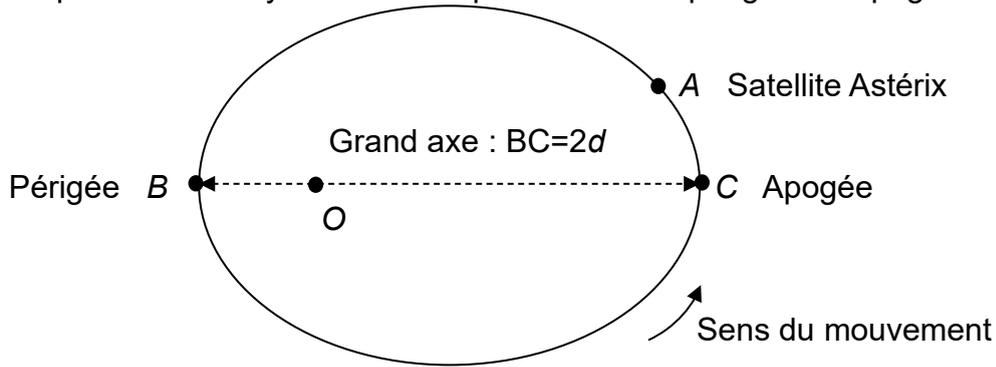


Figure 2. Trajectoire elliptique du satellite Astérix.

**Données :**

- Grand axe :  $BC = 2d$  ;
- Distance entre le périhélie et le centre de la Terre :  $D_{OB} = 6,89 \times 10^6 \text{ m}$  ;
- Distance entre l'apogée et le centre de la Terre :  $D_{OC} = 8,07 \times 10^6 \text{ m}$  ;
- Constante de gravitationnelle universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Q5.** En vous aidant de la figure 2 et des données, calculer la valeur du demi-grand axe  $d$  de l'ellipse de la trajectoire du satellite Astérix.

Dans le cas d'une trajectoire elliptique, la troisième loi de Kepler établie à la question Q4 s'écrit en remplaçant la valeur du rayon de la trajectoire circulaire par la valeur du demi-grand axe de la trajectoire elliptique. Ainsi, on obtient l'expression :  $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$ .

**Donnée :**

- Le satellite Astérix effectue 1400 révolutions autour de la Terre en une durée  $\Delta t$  d'une valeur égale à  $9,03 \times 10^6 \text{ s}$ .

**Q6.** En exploitant l'expression de la période  $T$  de révolution d'un satellite en orbite elliptique, calculer la masse  $M_T$  de la Terre.

## Mesure de la masse de la Terre à l'aide d'un pendule.

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur  $\ell$  et de masse négligeable.

L'étude des oscillations d'un pendule simple permet de déterminer la masse de la Terre. Pour cela, on fait osciller le pendule autour de sa position d'équilibre verticale et on repère sa position en mesurant l'angle  $\theta$ .

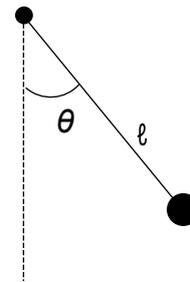


Schéma d'un pendule simple

On représente les variations de l'angle  $\theta$  en fonction du temps pour un pendule de longueur  $\ell = 1,0$  m sur la figure 3.

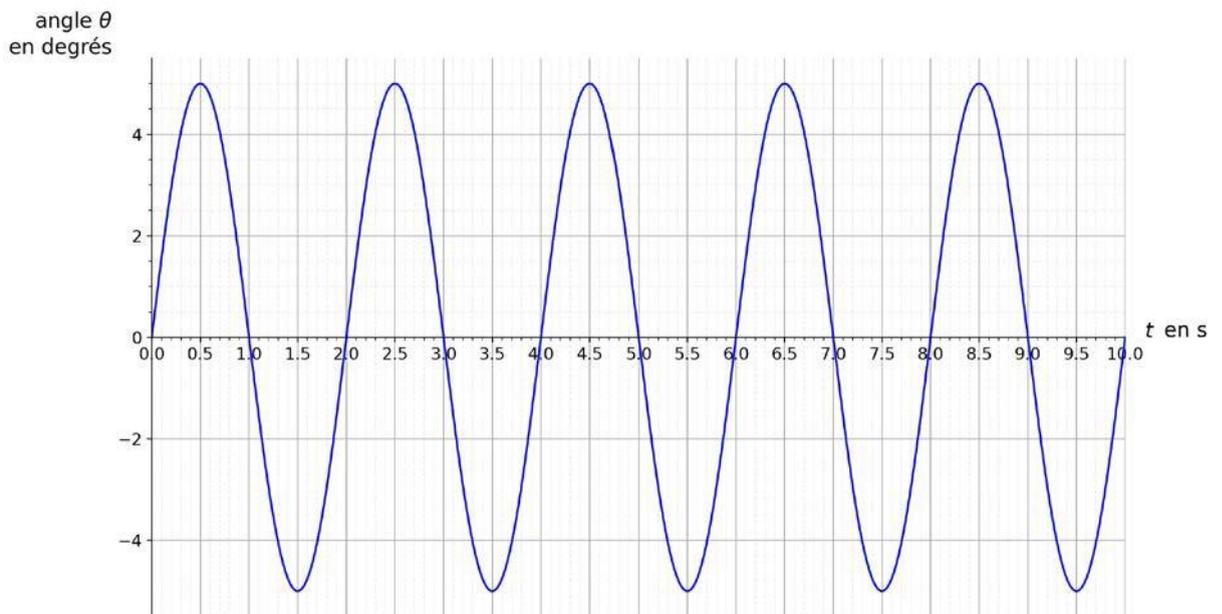


Figure 3. Variations de l'angle  $\theta$  en fonction du temps.

**Q7.** Exploiter la figure 3 pour déterminer, le plus précisément possible, la valeur de la période  $T$  des oscillations du pendule.

On admet que l'expression de la période des oscillations du pendule est  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  avec  $\ell$  la longueur du pendule, en mètres, et  $T$  la période des oscillations, en secondes.

**Q8.** Calculer la valeur de l'intensité de pesanteur  $g$ .

**Donnée :**

➤ Distance entre le pendule et le centre de la Terre :  $R_T = 6,37 \times 10^3$  km.

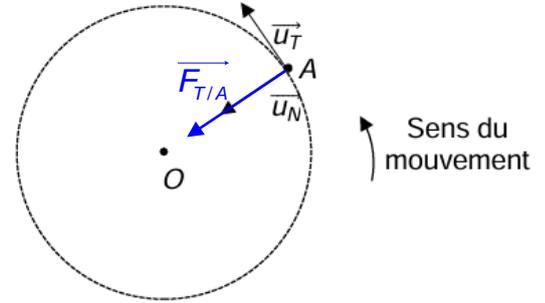
**Q9.** En considérant que le poids  $P$  du pendule est de valeur égale à la force d'interaction gravitationnelle  $F$  exercée par la Terre sur le pendule, déterminer la valeur  $M_T$  de la masse de la Terre.

Mesure de la masse de la Terre à l'aide d'un satellite

Q1. Reproduire la figure 1 sur votre copie et représenter sans souci d'échelle, la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{T/A}$  exercée par la Terre sur le satellite.

Q2. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle  $\vec{F}_{T/A}$  en fonction du vecteur unitaire  $\vec{u}_N$ , de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$  et  $r$ .

$$\vec{F}_{T/A} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$



Q3. En appliquant la deuxième loi de Newton au centre de masse A du satellite, établir que sa vitesse a pour expression  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$ .

Système : satellite      Référentiel géocentrique

Inventaire des forces : le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Deuxième loi de Newton :  $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/A} = m \cdot \vec{a}$

$$m \cdot \vec{a} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération est également définie par

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_N$$

$$\text{Ainsi } \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_N = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{u}_N$$

$$\text{Donc } v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \text{ et finalement on retrouve } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Q4. À l'aide de l'expression littérale de la vitesse  $v$  du satellite et de la définition de la période de révolution  $T$  du satellite autour de la Terre, vérifier que l'expression de la

troisième loi de Kepler est :  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$ .

Pendant une période de révolution  $T$ , le satellite parcourt l'orbite circulaire de périmètre  $2\pi r$  à la vitesse  $v$ .

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G M_T}{r}$$

$$4\pi^2 r^2 \cdot r = T^2 \cdot G \cdot M_T$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

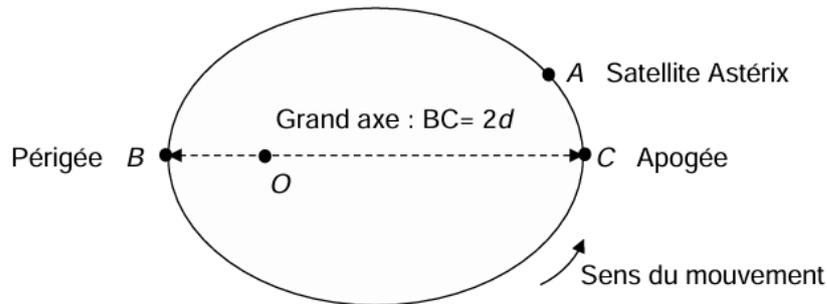


Figure 2. Trajectoire elliptique du satellite Astérix.

**Données :**

- Grand axe :  $BC = 2d$  ;
- Distance entre le périhélie et le centre de la Terre :  $D_{OB} = 6,89 \times 10^6$  m ;
- Distance entre l'apogée et le centre de la Terre :  $D_{OC} = 8,07 \times 10^6$  m ;
- Constante de gravitationnelle universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>·s<sup>-2</sup>.

**Q5. En vous aidant de la figure 2 et des données, calculer la valeur du demi-grand axe  $d$  de l'ellipse de la trajectoire du satellite Astérix.**

$$BC = 2d = D_{OB} + D_{OC}$$

$$d = \frac{D_{OB} + D_{OC}}{2}$$

$$d = \frac{6,89 \times 10^6 + 8,07 \times 10^6}{2} = 7,48 \times 10^6 \text{ m}$$

**Le satellite Astérix effectue 1400 révolutions autour de la Terre en une durée  $\Delta t$  d'une valeur égale à  $9,03 \times 10^6$  s.**

**Q6. En exploitant l'expression de la période  $T$  de révolution d'un satellite en orbite elliptique, calculer la masse  $M_T$  de la Terre.**

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$\text{donc } M_T = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot T^2}$$

$$\text{Avec } T = \frac{\Delta t}{n}, \text{ on a alors } M_T = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot \left(\frac{\Delta t}{n}\right)^2}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2 \times (7,48 \times 10^6)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times \left(\frac{9,03 \times 10^6}{1400}\right)^2} = 5,95 \times 10^{24} \text{ kg}$$

|  |
|--|
| $\frac{4\pi^2 * 7.48E6^3}{6.67E-11 * \left(\frac{9.03E6}{1400}\right)^2} = 5.954143086E24$ |
|--|

Mesure de la masse de la Terre à l'aide d'un pendule.

On représente les variations de l'angle  $\theta$  en fonction du temps pour un pendule de longueur  $\ell = 1,0$  m sur la figure 3.

Q7. Exploiter la figure 3 pour déterminer, le plus précisément possible, la valeur de la période  $T$  des oscillations du pendule.

Entre 0,5 s et 8,5 s, il s'écoule 4 périodes.

Donc  $T = (8,5 - 0,5) / 4 = 2,0$  s.

On admet que l'expression de la période des oscillations du pendule est  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  avec  $\ell$

la longueur du pendule, en mètres, et  $T$  la période des oscillations, en secondes.

Q8. Calculer la valeur de l'intensité de pesanteur  $g$ .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{donc } T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell}{g} \quad \text{ainsi } g = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell}{T^2}$$

$$4 * \pi^2 * \frac{1}{2^2}$$

9.869604401E0

$$g = 4\pi^2 \times \frac{1,0}{2,0^2} = 9,9 \text{ m.s}^{-2} \text{ en ne conservant que deux chiffres significatifs.}$$

Donnée : Distance entre le pendule et le centre de la Terre :  $R_T = 6,37 \times 10^3$  km.

Q9. En considérant que le poids  $P$  du pendule est de valeur égale à la force d'interaction gravitationnelle  $F$  exercée par la Terre sur le pendule, déterminer la valeur  $M_T$  de la masse de la Terre.

$$F = P$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = m \cdot g$$

$$G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g$$

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$$

$$M_T = \frac{9,86904401 \times (6,37 \times 10^3 \times 10^3)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Merci de nous signaler d'éventuelles erreurs à [labolycee@labolycee.org](mailto:labolycee@labolycee.org)