EXERCICE - DE HUBBLE À JAMES WEBB - 5 POINTS

Dès 1923, Hermann Oberth mentionne l'intérêt d'un télescope spatial. En effet, un télescope terrestre reçoit des radiations filtrées par l'atmosphère terrestre qui absorbe des radiations électromagnétiques dans le domaine de l'infrarouge notamment. Par ailleurs un télescope spatial n'est pas sensible aux turbulences atmosphériques.

Le télescope spatial Hubble, du nom de l'astronome américain Edwin Hubble, a été lancé en 1990. Celui-ci souffrait au départ d'un défaut de courbure du miroir, non détecté avant la mise en orbite, qui provoquait des images floues. Après modification grâce à une mission spatiale, Hubble put enfin fournir ses premières images de l'Univers dans le domaine du spectre ultraviolet, visible et proche infrarouge. Le télescope Hubble, d'une masse m = 11 tonnes, est positionné sur une « orbite basse » à une altitude quasi constante h = 600 km de la surface de la Terre.

Le télescope spatial James Webb, du nom d'un administrateur de la NASA, doit succéder au télescope Hubble en 2018. Il sera lancé par une fusée Ariane 5. Le télescope spatial James Webb, d'une masse de 6200 kg, sera en orbite à une distance proche de 1,5 millions de kilomètres de la Terre en un point dénommé « point de Lagrange L2 » (voir documents 1 à 3).

D'après www.wikipedia.fr, www.hubblesite.org et http://www.jwst.nasa.gov

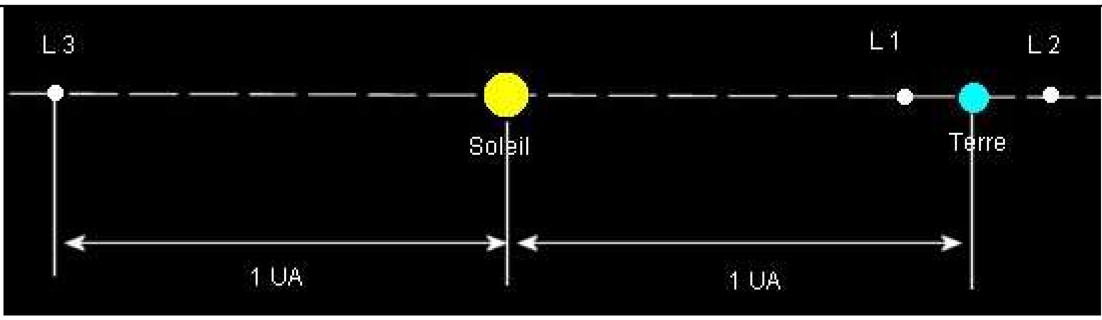
Document 1 : Points de Lagrange

En mécanique céleste, il est un sujet qui a passionné de nombreux mathématiciens : c'est le problème dit « des trois corps ». Joseph-Louis Lagrange étudia le cas d'un petit corps, de masse négligeable, soumis à l'attraction de deux plus gros : le Soleil et, par exemple, une planète. Il découvrit qu'il existait des positions d'équilibre pour le petit corps.

Un point de Lagrange (il en existe 5, notés L1 à L5) est une position de l'espace où les champs de gravité de deux corps très massifs en orbite l'un autour de l'autre fournissent exactement la force centripète requise pour que ce point de l'espace accompagne simultanément la rotation des deux corps.

Dans le cas où les deux corps sont en orbite circulaire, ces points représentent les endroits où un troisième corps de masse négligeable resterait immobile par rapport aux deux autres : il accompagnerait à la même vitesse angulaire leur rotation autour de leur centre de gravité commun sans que sa position par rapport à eux n'évolue. La sonde d'observation SoHO, destinée à observer le Soleil, a par exemple été placée au point L1.

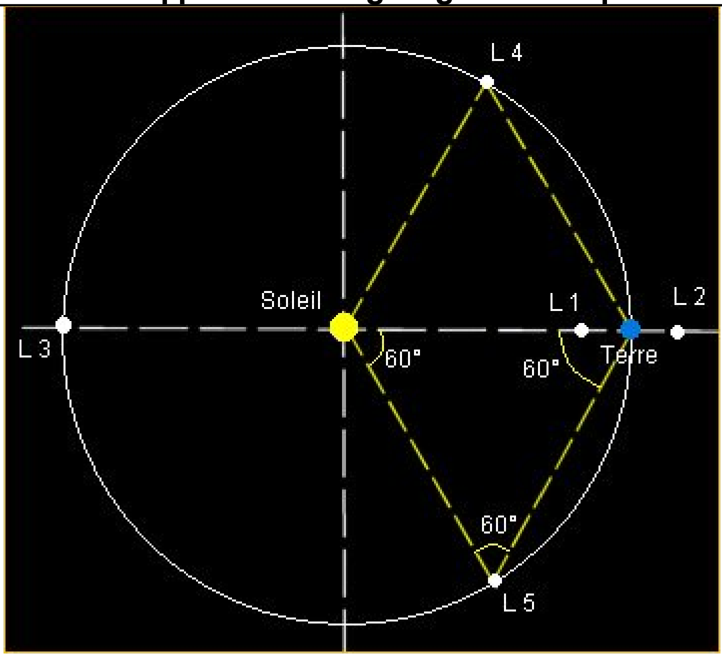
Document 2 : Positions des points de Lagrange sur l'axe Soleil-Terre



Positions des points L1 à L3 sur l'axe Soleil-Terre

http://fr.wikipedia.org

Document 3 : Positions des cinq points de Lagrange dans le plan de l'écliptique



Positions des 5 points de Lagrange

http://fr.wikipedia.org

Données :
Constante de gravitation universelle : G = $6,67 \times 10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
Masse du Soleil : $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg
Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg
Distance moyenne Soleil-Terre : d = $149,6 \times 10^6$ km équivaut à 1 UA (unité astronomique)
Rayon de la Terre : R_T = 6370 km
Durée d'une année terrestre : 365,25 jours

Les deux parties sont indépendantes

1. Première partie : étude de l'orbite du télescope spatial Hubble

On étudie le système {télescope spatial Hubble} dans le référentiel géocentrique en négligeant l'interaction gravitationnelle du Soleil avec le télescope.

1.1. Quelle est la trajectoire du télescope Hubble dans ce référentiel ?

1.2. À partir de la deuxième loi de Newton, montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du télescope Hubble est uniforme.

1.3. Montrer que l'expression de la valeur de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique est : $v = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_T + h}}$.

1.4. Établir l'expression de sa période de révolution T en fonction de R_T, h et v.

1.5. Rappeler la troisième loi de Kepler.

Montrer que dans le cas du télescope spatial Hubble on a la relation : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_T}$ où r = R_T + h représente la distance entre le centre de la Terre et le télescope spatial.

1.6. Calculer la période de révolution T du télescope spatial Hubble, exprimée en minutes.

BAC S 2013 Antilles Guyane Session remplacement EXERCICE 3
DE HUBBLE A JAMES WEBB (5 POINTS) CORRECTION

1. Première partie : étude de l'orbite de Hubble

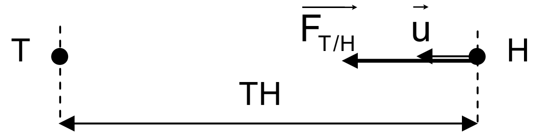
1.1. (0,25) Le télescope Hubble évolue à une altitude constante de la surface de la Terre. Dans le référentiel géocentrique, sa trajectoire est un cercle.

1.2. (1 pt) La 2ème loi de Newton appliquée au système {télescope}, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen indique $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

En considérant que le télescope n'est soumis qu'à la force $\overrightarrow{F_{T/H}}$ d'attraction gravitationnelle de la Terre, on a $\overrightarrow{F_{T/H}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

La masse du satellite étant constante, on a : $\overrightarrow{F_{T/H}} = \dfrac{dm.\vec{v}}{dt}$ = $m.\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a}$

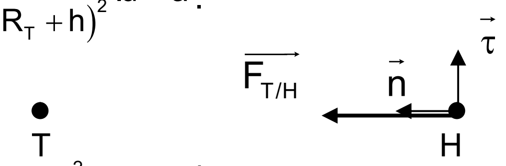
L'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{T/H}}$ est $\overrightarrow{F_{T/H}} = G\cdot\dfrac{m.M_T}{(TH)^2}.\vec{u}$



En posant TH = R_T + h il vient : $G.\dfrac{m.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{u} = m.\vec{a}$

L'accélération de Hubble est donc $G.\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{u} = \vec{a}$.

Dans le repère de Frenet $(H,\vec{n},\vec{\tau})$,



le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)}.\vec{n} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$.

avec $\vec{n} = \vec{u}$ on obtient : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)}.\vec{u} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$.

En égalant les deux expressions de l'accélération, il vient : $\dfrac{G.M_T}{(R_T+h)^2}.\vec{u} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)}.\vec{u} + \dfrac{dv}{dt}.\vec{\tau}$

Par identification on obtient : $\begin{cases} \text{sur } \vec{u} : \dfrac{G\cdot M_T}{(R_T+h)^2} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)} \\ \text{sur } \vec{\tau} : 0 = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow v = cte \end{cases}$

La valeur de la vitesse de la station est constante donc le mouvement est uniforme.

1.3. (0,5) D'après la question précédente, on a $\dfrac{G.M_T}{(R_T+h)^2} = \dfrac{v^2}{(R_T+h)}$

On en déduit que $v = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{R_T+h}}$.

1.4. (0,5) Pendant une période T, le satellite parcourt son orbite de longueur $2\pi(R_T + h)$ à la vitesse v, donc $T = \dfrac{2\pi.(R_T + h)}{v}$.

1.5. (0,5) Énoncé de la 3ème loi de Kepler : Le rapport du carré de la période de révolution par le cube du demi-grand axe de l'ellipse (ou du cube du rayon du cercle) est une constante qui ne dépend que du centre attracteur.

D'après la question 1.4 : $T^2 = \dfrac{4\pi^2.(R_T + h)^2}{v^2}$

D'après la question 1.3 : $v^2 = \dfrac{G.M_T}{R_T + h}$

On en déduit que : $T^2 = \dfrac{4\pi^2.(R_T + h)^2}{\dfrac{G.M_T}{R_T + h}} = \dfrac{4\pi^2.(R_T + h)^3}{G.M_T}$

Finalement en posant $r = R_T + h$, le rayon de l'orbite on obtient $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_T}$

1.6. (0,5) Pour calculer la valeur de T : R_T et h sont à exprimer en m

$T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2.(R_T + h)^3}{G.M_T}}$

2. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 \times ((6370 + 600) \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} = 5,79\times10^3$ s = 96,6 min