Programme Mathématiques Complémentaires
Terminale Générale

Source: http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/lmapolaccueil.html

Analyse

Probabilités et statistiques

Limites de suites

Théorèmes d'existence de la limite

- Une suite croissante **et** majorée par un réel M **converge** vers un réel $\ell \leqslant M$
- Une suite décroissante **et** minorée par un réel m **converge** vers un réel $\ell \geqslant m$

⚠ Si la limite existe, elle est unique

Ces théorèmes ne sont pas effectifs

"Contretemps" : les formes indéterminées

$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$

Il faut savoir les identifier puis les lever.

⚠ À connaître

Les limites de référence.

Notamment

$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ si $q = 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

$\lim_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leqslant -1$

Soit (u_n) une suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, et si f est continue en ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Feuille de route

En général, dans le cas des suites récurrente d'ordre 1, on utilise un théorème d'existence de la limite ℓ.

On dispose alors d'une méthode explicite pour déterminer la valeur de ℓ. On résout $f(x) = x$, ℓ appartient alors à l'ensemble solution de cette équation.

- La suite est explicite : dans ce cas, on passe à la limite directement
- **Autres outils**
  1) Le théorème des gendarmes pour prouver la convergence.
  2) Le théorème de comparaison qui permet de montrer que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$
- Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$

Détermination explicite de $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Les théorèmes ou méthodes permettent de conclure.

ANALYSE: les suites

Limites d'une suite

- **Convergence** d'une suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie que

Tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers ℓ.

Il n'existe qu'un nombre fini de termes à l'extérieur de cet intervalle.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est monotone et converge vers ℓ.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) se trouvent à l'intérieur d'un intervalle ouvert centré en ℓ de rayon r.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $|u-\ell| \geqslant r$
   faire
    $f(u) \to u$
    $N+1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

- **Divergence** d'une suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que

Tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.
Les termes de la suite (u_n) arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont supérieur à un réel A.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $u \leqslant A$ **faire**
    $f(u) \to u$
    $N+1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

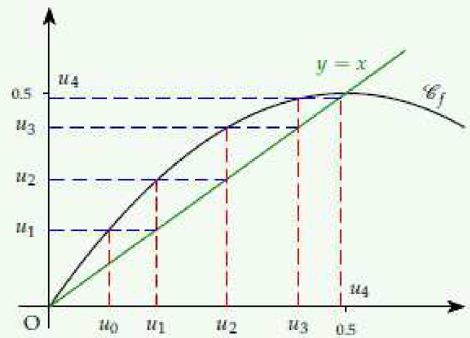
Remarque : une suite peut diverger sans avoir de limite.
La suite $[(-2)^n]$ diverge et n'admet pas de limite.

Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Variation** d'une suite d'une suite : **2 méthodes**
  1) On étudie le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$.
     Si la quantité est $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) la suite est croissante (resp. décroissante).
  2) Si tous les termes sont > 0, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
     Si la quantité est $\geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$), la suite est croissante (resp. décroissante).
- **Représentation** des premiers termes de la suite :

Méthode : On trace la courbe de la fonction associée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

Exemple : Soit la suite $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.



- Pour trouver la forme explicite de u_n, on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.
  Parmi ces suites, on a les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$

$$v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

Raisonnement par récurrence
Limite d'une suite

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Axiome de récurrence

Définition 1 Soit une propriété $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$. Si :

- la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0
- la propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant n_0$ alors $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)

Alors : la propriété est vraie à partir du rang n_0

1.2 Exemple

Démontrer que, pour tout entier naturel, la suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est telle que $0 < u_n < 2$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante car composée de deux fonctions croissantes

$0 < u_n < 2 \;\Leftrightarrow\; f(0) < f(u_n) < f(2) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} < u_{n+1} < 2 \;\Rightarrow\; 0 < u_{n+1} < 2$

La proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

2 Limite d'une suite

Définition 2 On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite **converge** vers ℓ

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Théorème de comparaison

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Suites géométrique : soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

3.2 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	F. ind.	∞

3.3 Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

4 Convergence d'une suite monotone

Définition 3 On dit que la suite (u_n) est **majorée** si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est **minorée** si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est **bornée**.

Divergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Convergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Théorème du point fixe
Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout $n, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2+x}$ est définie et continue sur $]-2; +\infty[$.
Comme la suite (u_n) est convergente vers ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ verifie l'équation $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.
En élevant au carré, on trouve : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ qui admet deux solutions -1 et 2. Comme la suite (u_n) est positive, elle converge donc vers 2.

Analyse: : continuité, dérivabilité, limites, représentations

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  Tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x\in]A\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ **asymptote horizontale** $y=\ell$
  Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x\in]A\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ **asymptote verticale** $x=a$
  tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $x\in]a-\epsilon\,;\,a+\epsilon[$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
  Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $x\in]a-\epsilon\,;\,a+\epsilon[$.

Opérations sur les limites

On peut calculer les limites par somme, produit et quotient sauf dans les 4 cas suivants. Dans ces cas, on changera la forme de la fonction ou on utilisera des limites de référence (voir fonctions exp et ln)

1) $+\infty-\infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'un produit.
2) $0\times\infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'une somme.
3) $\dfrac{0}{0}$: On simplifiera la fonction dans le cas d'une fonction rationnelle ou on essaiera de passer par le nombre dérivé si la fonction est dérivable.
4) $\dfrac{\infty}{\infty}$: On mettra en facteur le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

Théorème des gendarmes et de comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

- **Théorème des « Gendarmes »**

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I,\ g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$$

- **Théorème de comparaison**

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I,\ f(x)\geqslant g(x)\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I,\ f(x)\leqslant h(x)\\ \lim\limits_{x\to a} h(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$$

Limites, Continuité, Dérivabilité

Continuité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a. La fonction f est **continue** en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

⚠ f continue en a $\not\Rightarrow$ f dérivable en a

Dérivabilité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a. f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie en a que l'on appelle nombre dérivé de f en a

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Théorème : f dérivable en a $\Rightarrow$ f contine en a

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie sur I = $[a,b]$.

- Si f **continue et strictement monotone** sur I = $[a,b]$.
- et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
- alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** dans I = $[a,b]$.

Pour l'équation $f(x)=0$, on montrera que $f(a)f(b)<0$.

On peut généraliser ce théorème à un intervalle ouvert borné ou non.

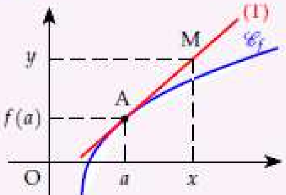
Variation et extremum

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant a.

- Si $\forall x\in$ I, $f'(x)>0$ $\Rightarrow$
  f est **strictement croissante** sur I .
- Si $\forall x\in$ I, $f'(x)<0$ $\Rightarrow$
  f est **strictement décroissante** sur I
- Si $f'(a)=0$ et si f' **change de signe en a** alors la fonction f admet un extremum local en a.

Tangente

Si f est dérivable en a, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point a une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ d'équation :



(T) $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Limite d'une fonction composée et quelques exemples de limites

Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g[f(x)] = c$$

Exemples de limites

1) Soit $f(x) = \ln(e^x + 2)$. Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

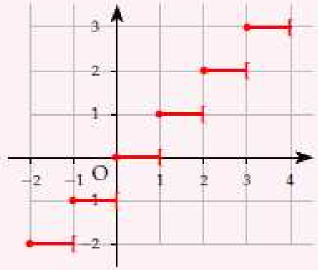
2) Soit $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{10}{1+e^{-x}}$. Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{1+e^{-x}} = 10 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

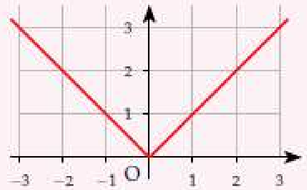
Compléments : cas de discontinuité et de non dérivabilité

- Le cas le plus fréquent de discontinuité consiste à un « saut » de la fonction autour d'une valeur comme c'est le cas par exemple de la fonction E, partie entière d'un réel x, autour de chaque valeur entière.

  Si $n \leqslant x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ alors $E(x) = n$



- Un cas de non dérivabilité se rencontre lorsqu'en un point la dérivée à droite est différente de la dérivée à gauche. Sur la courbe, on observe alors un point anguleux. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue en 0. Le nombre dérivé à droite vaut 1 et à gauche -1.



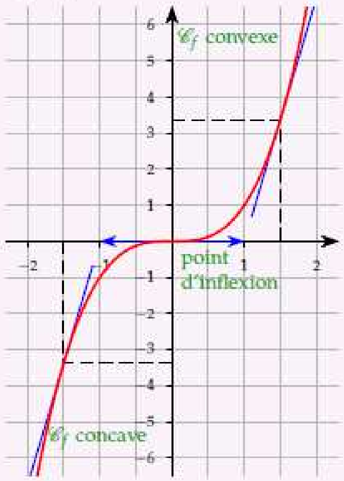
⚠ La fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0

Concavité et point d'inflexion

(Notion maintenant hors programme)

Lorsque f' s'annule sans changer de signe en a, f n'admet pas d'extremum en a mais un point d'inflexion. C'est le cas de la fonction cube en 0.

- Une courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur I, lorsque que ses tangentes sont en dessous de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors positive.
- Une courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur I, lorsque que ses tangentes sont au dessus de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors négative.
- Un point d'inflexion d'une courbe $\mathscr{C}_f$, est le point de la courbe où il y changement de concavité. La dérivée seconde f'' est alors nulle.

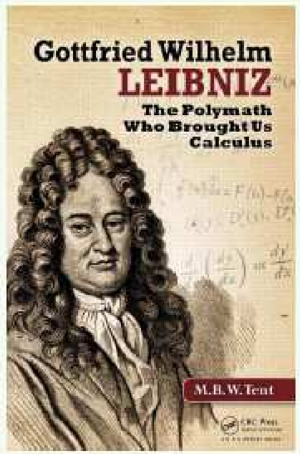


Culture

La notion de dérivabilité a mis plus de deux siècles avant d'être bien résolue.
Le problème de la dérivée s'est posé à l'époque de Newton dans le calcul de la vitesse instantanée. Newton et Leibniz calculaient alors la vitesse instantanée comme une petite variation du déplacement dx d'un point M sur un axe Ox sur un petite variation de temps dt.

$v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ notation différentielle

Les calculs sur des petites quantités, considérées parfois comme très petites mais non nulles, parfois comme nulles, a donné le calcul infinitésimal. Ce calcul a été abandonné par manque de rigueur au profit du calcul sur les limites.



Leibniz (1646-1716)

Analyse: intégration

Intégration

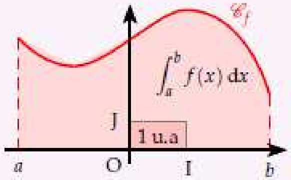
$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

f continue sur $[a;b]$

Définition

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle **intégrale de** f sur $[a;b]$ la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

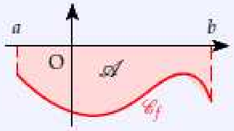


On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Relations aire et intégrale

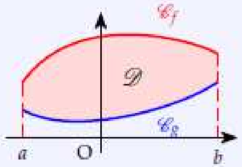
- Soit $f \leqslant 0$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- Soient deux fonctions $f \geqslant g$ continues sur $[a;b]$.

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$



Primitive

- **Théorème d'existence :**
Toute fonction f continues sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- La fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f qui s'annule en a.
$F(a) = 0$ et $\forall x \in \mathrm{I},\ F'(x) = f(x)$
- **Lien entre primitive et intégrale :**

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^b = F(b) - F(a)$$

Fonction paire et fonction impaire

- Si f est une fonction paire alors $\forall a \in D_f$:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si f est une fonction impaire alors $\forall a \in D_f$:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Propriétés algébrique

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- **Linéarité de l'intégrale** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- $\forall a \in \mathrm{I}, \quad \displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\forall a, b \in \mathrm{I}, \quad \displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles**

$$\forall a, b, c \in \mathrm{I}, \quad \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La formule de la moyenne est attribuée à Pierre-Gosselin Bonnet(1819-1892)

Inégalité de la moyenne

Si, pour tout $x \in [a;b]$, il existe deux réels m et M tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Alors : $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Intégrale et inégalité

Soit f et g 2 fonctions continues sur $[a;b]$.

- **Positivité**
Si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
- **Intégration d'une inégalité**
Si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

⚠ On ne peut rien déduire du signe de f à partir du signe de son intégrale, de même on ne peut pas comparer deux fonctions f et g à partir de la comparaison de leurs intégrales.

Analyse: intégration

Quelques méthodes pour trouver une primitive

1) Le tableau des primitives usuelles.
2) Adapter un coefficient de façon à obtenir une forme que donne une primitive connue.

$$f(x)=\frac{1}{(3x+5)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{(3x+5)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u^2(x)}\ \Rightarrow\ F(x)=\frac{-1}{3(3x+5)}$$

3) La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle dans le but de se ramener à 1)

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x+1}=2+\frac{3}{2x+1}\ \Rightarrow\ F(x)=2x+\frac{3}{2}\ln|2x+1|$$

4) Il arrive parfois que l'on accède à deux intégrales I et J grâce à un système linéaire astucieux.

Compléments : quelques calculs astucieux d'intégrales

1) $I_1=\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e u'(x)u(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e=\ldots$

2) $I_2=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_e^{e^2}\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2}=\ldots$

3) Utilisation des formules trigonométrique de duplication.

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2u(x)u'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Forme implicite

- En terminale, on doit parfois se résigner à prédire l'existence de primitives sans parvenir à les exhiber.

  Par exemple, on ne sait pas déterminer l'unique primitive de « ln » qui s'annule en $x=e$ de manière explicite mais on dispose d'une description explicite : $\displaystyle\int_e^x\ln x\,\mathrm{d}x$.

- On peut montrer qu'il n'est pas possible d'exprimer une primitive de la fonction de Gauss $x\ \mapsto\ e^{-x^2}$ à l'aide de fonction usuelles. Il faut donc parfois se résigner à manipuler des expressions abstraites.

  On retrouve en probabilité cette intégrale dans la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite avec la fonction Φ

  $$\Phi=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

  On peut montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

Intégration par parties
(méthode de calcul désormais hors programme)

- Cette méthode utilise la dérivée du produit : $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

  Soit u et v deux fonctions dérivables, de dérivée continues, sur $[a;b]$.
  (On dit que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$)

  $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

  En effet :
  $$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\ \Leftrightarrow$$
  $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

- Calculer : $I=\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$, on pose alors $\begin{cases}u(x)=\ln x & u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v'(x)=x & v(x)=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$

  $$I=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^2-0-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$
  $$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

« Généalogie fonctionnelle »

On dérive — On dérive — On dérive

F — f — f' — f''

On intègre — On intègre — On intègre

Point méthode
Pour vérifier que F est une primitive de f sur I, on montre que
$$F'(x) = f(x)$$
Exemple : Montrer que F telle que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$

Point méthode
Le signe de f' sur I induit les variations de f sur I.

Point méthode
Le signe de f'' sut I induit les variations de f' sur I ainsi que la convexité de f sur cette intervalle.

une primitive de f sur I

⚠ Deux primitives F et G d'une fonction f diffèrent d'une constante c réelle.
$$\forall x \in \text{I},\ F(x) = G(x) + c$$
Graphiquement, on passe de $\mathscr{C}_G$ à $\mathscr{C}_F$ par une translation de vecteur $c\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$

Soit f une fonction deux fois dérivables à dérivées continues sur I

En physique, f est associée à l'équation horaire $x(t)$ (position).

Soit f' **la** fonction dérivée première de la fonction f sur I.

En physique, f' est associée à la vitesse $v(t)$.

Soit f'' **la** fonction dérivée seconde de la fonction f sur I.

En physique, f'' est associée à l'accélération $a(t)$.

Une application

Soit f la fonction deux fois dérivables, à dérivées continue sur $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x\cos 2x$$
On peut facilement vérifier que, $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\sin 2x - \frac{1}{4}f''(x)$

en effet : $f'(x) = \cos 2x - 2x\sin 2x \ \Rightarrow$

$f''(x) = -2\sin 2x - 2\sin 2x - 4x\cos 2x = -4\sin 2x - 4f(x) \ \Leftrightarrow\ 4f(x) = -4\sin 2x - f''(x)$

Cette relation fonctionnelle permet d'atteindre l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}f'(x) + c \quad$ avec $c \in \mathbb{R}$

Culture : On dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle du second ordre :
$$y + \frac{1}{4}y'' = -\sin 2x \quad \text{où } y : x \mapsto y(x)$$

Probabilités et statistiques

Les probabilités discrètes

Définition

Ω : l'univers, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.

A : événement, sous-ensemble de l'univers Ω

$\overline{A}$: événement contraire, complémentaire de A dans Ω

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω, est la fonction p à valeur dans $[0\,;\,1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n événements élémentaires de Ω

- $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$
- $p(\varnothing) = 0$
- Pour tout événements A et B, on a les relations :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Indépendance

Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits indépendants ssi :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Autres formulations avec $p(A) \neq 0$ et $(B) \neq 0$

$$p_A(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_B(A) = p(A)$$

Conséquence : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également. (ROC)

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Probabilité conditionnelle

Soit A, un événement de probabilité non nulle.

On pose : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On lit « probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé ». On parle de probabilité conditionnelle

⚠ Bien interpréter les énoncés et à ne pas confondre $p(A \cap B)$ et $p_A(B)$ …

Détecteur de condition : « parmi », « sachant que », « On a B. Quelle est la probabilité de A », « Si B, probabilité de A »

Partition de Ω

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω, alors les événements A_i sont deux à deux incompatibles et :

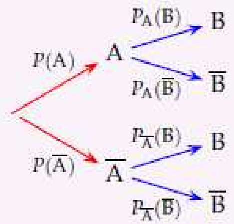
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

Probabilité totale : pour tout événement B on a

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Cas fréquent en terminale : partition A et $\overline{A}$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \\ &= p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$



Probabilités et statistiques

La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un schéma de Bernoulli lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli, c'est à dire une expérience aléatoire à 2 issues : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q = 1 - p$.
- Si l'on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès sur n expériences de Bernoulli, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, n et p sont appelés paramètres de la loi.

Notations compactes possibles : $X \longrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

On retient : probabilité d'obtenir exactement k succès sur n expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Dans ce cas : $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Quelques variantes fréquentes au Bac... : on suppose que $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès : $p(30 \leqslant X \leqslant 45) = p(X \leqslant 45) - p(X \leqslant 29)$

Point culture

- Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est appelé « coefficient binomial ». Il peut s'écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1$ « on lit factorielle n »

⚠ $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$

- Triangle de Pascal (1623-1662)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Formule de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Culture - Formule de Bayes

Cette formule est aussi appelée « théorème de la probabilité des causes », car elle permet de renverser un conditionnement. On l'obtient en remarquant que la probabilité d'une intersection $A \cap B$ peut s'écrire soit en conditionnant A par B, soit en conditionnant B par A :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Comme par ailleurs

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

On obtient la formule : $p(B) \neq 0$

$$P_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

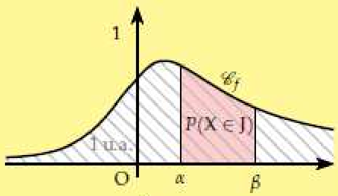
Lois à densité. Loi normale

1 Lois à densité

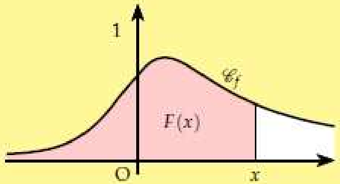
1.1 Généralités

Définition 1 On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X, la fonction f continue et positive sur un intervalle I ($[a;b]$, $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$) telle que :

- $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \displaystyle\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$, on a : $P(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t$



- La fonction F définie par : $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée la **fonction de répartition** de la variable X
$$F(x) = \int_{\substack{a\\-\infty}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

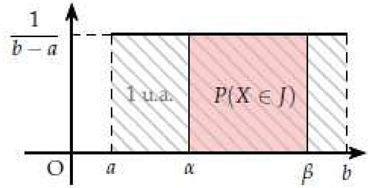


- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur I, est :
$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Loi uniforme

Définition 2 X suit une loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a, b]$, alors :
$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a :
$$P(X \in \mathrm{J}) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$
La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



1.3 Loi exponentielle

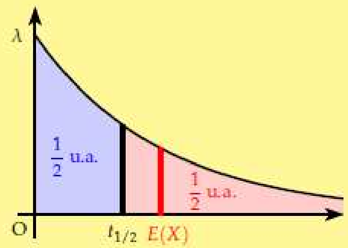
Définition 3 X suit une loi exponentielle de paramètre réel λ alors :
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$
On a les relations suivantes

- La fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(\mathrm{X} \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$ et $P(\mathrm{X} \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $P(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Théorème 1 La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**
$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Théorème 2 X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

- l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$
- La demi vie : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
- $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$



2 La loi normale

2.1 La loi normale centrée réduite

Définition 4 On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

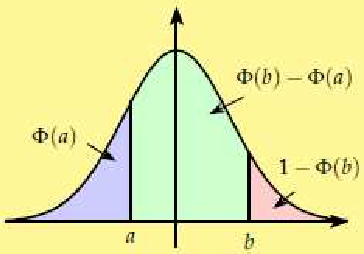
X suit une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$, si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ.

Sa fonction de répartition Φ vaut : $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

L'espérance de X vaut 0 et son écart-type 1 d'où $\mathcal{N}(0,1)$

Théorème 3 X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors pour tous réels a et $b > a$ on a :

- $P(X \leqslant a) = \Phi(a)$
- $P(X \geqslant b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



Théorème 4 X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$:

- $P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0,95$
- $P(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) = 0,99$

2.2 La loi normale générale

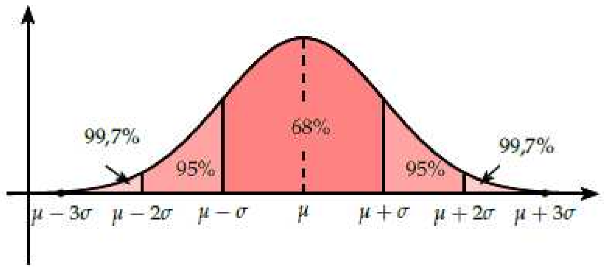
Définition 5 Changement de variable

X suit une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

On a alors : $\mathrm{E(X)} = \mu$ et $\mathrm{V(X)} = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 5 Théorème de Moivre-Laplace

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et Z tel que :

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}}{\sigma(\mathrm{X})} = \frac{\mathrm{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

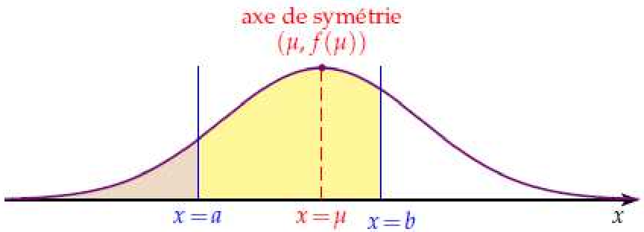
$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

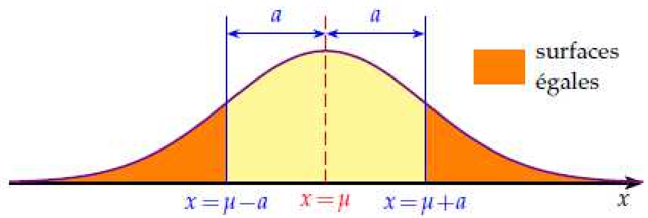
$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

⚠ Faire la correction de continuité : $P(7 \leqslant X \leqslant 15) = P_N(6,5 \leqslant X \leqslant 15.5)$

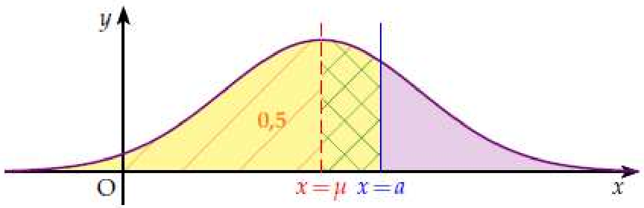
Propriétés de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



$$
\begin{aligned}
p(a \leqslant X \leqslant b) &= p(a < X < b)\\
&= p(X \leqslant b) - p(X \leqslant a)\\
&= \underbrace{1}_{\text{aire totale}} \underbrace{-}_{\text{sauf}} p(X \leqslant a) - p(X \geqslant b)
\end{aligned}
$$

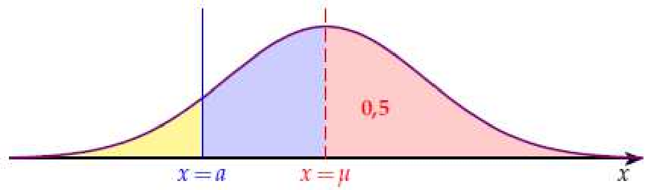


$$
\begin{aligned}
p(\mu - a \leqslant X \leqslant \mu + a) &= p(X \leqslant \mu + a) - p(X \leqslant \mu - a)\\
&= 1 - 2p(X \leqslant \mu - a)\\
&= 1 - 2p(X \geqslant \mu + a)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
p(X \leqslant a) &= p(X < a)\\
&= 0{,}5 + p(\mu \leqslant X \leqslant a)\\
&= 1 - p(X \geqslant a)\\
&= 1 - p(X > a)
\end{aligned}
$$

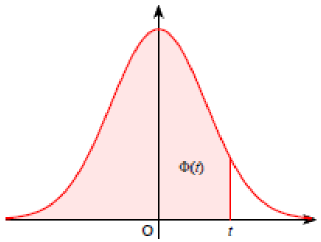
$$
\begin{aligned}
p(X \geqslant a) &= 0{,}5 - p(\mu \leqslant X \leqslant a)\\
&= p(X > a)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
p(X \leqslant a) &= p(X < a)\\
&= 0{,}5 - p(a \leqslant X \leqslant \mu)\\
&= 0{,}5 - p(X \geqslant a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(X \geqslant a) &= p(a \leqslant X \leqslant \mu) + 0{,}5\\
&= 1 - p(X \leqslant a)
\end{aligned}
$$

Table de la loi normale centrée réduite



$P(-1,96 < T < 1,96) = 0,95$

$P(-2,58 < T < 2,58) = 0,99$

Rappel :

$P(T > t) = 1 - P(T < t) = 1 - \Phi(t)$

$P(T < -t) = P(T > t) = 1 - \Phi(t)$

Exemple :

$P(T < 1,24) = 0,892\,5$

$P(T > 1,24) = 1 - 0,892\,5 = 0,107\,5$

$P(T < -1,24) = P(T > 1,24) = 0,107\,5$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000