

Thèmes d'étude mathématiques complémentaires

■ Corrélation et causalité

Problèmes possibles

- ☑ Établissement de la loi d'Ohm.
- ☑ Loi de désintégration radioactive.
- ☑ Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- ☑ Loi de Moore.

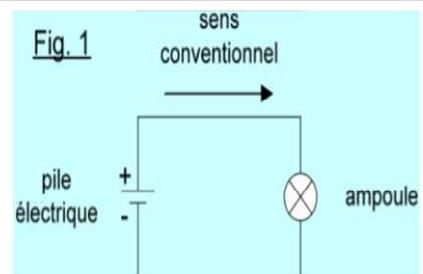
Contenus associés

- ☑ Fonctions usuelles.
- ☑ Représentations graphiques.
- ☑ Minimum d'une fonction trinôme.
- ☑ Séries statistiques à deux variables.

1. Etablissement de la loi d'Ohm

Le courant

Il ne circule que dans un circuit électrique fermé. Il circule de la borne + à la borne - du générateur.



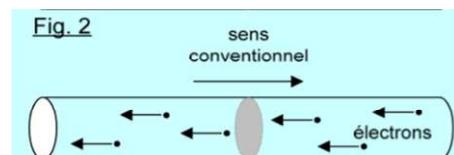
Intensité du courant: quantité d'électricité transportée par unité de temps. Elle se mesure à l'aide d'un ampèremètre.

$$I = \Delta q / \Delta t$$

I est en Ampère (A)

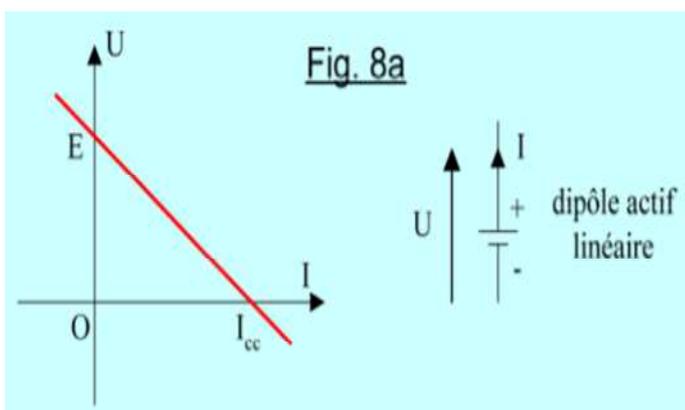
q est en Coulomb (C)

t est en seconde (s)



Source réelle de tension

La caractéristique d'une source réelle de source de tension ne passe pas par l'origine.



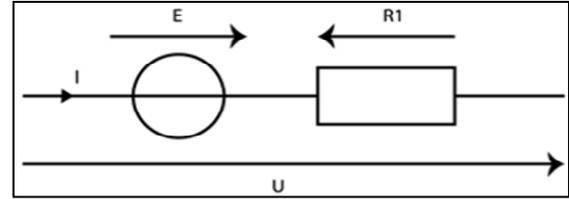
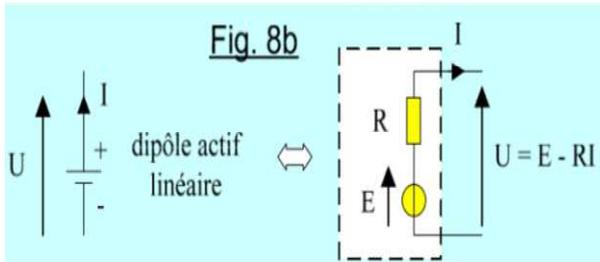
En maths : modèle affine $y = a.x + b$

avec a le coefficient directeur

En physique : modèle $U = -R.I + E$

avec $-R$ le coefficient directeur

La présence d'une résistance R dans le modèle d'une source réelle de tension impose le schéma suivant



Loi d'Ohm généralisée

- électromoteur générateur : $U = E - RI$

2. Loi de décroissance radioactive

Durée de vie des radioéléments

La désintégration des noyaux radioactifs au **niveau microscopique est aléatoire**, mais au **niveau macroscopique**, le nombre moyen N de noyaux restants dans l'échantillon suit une **loi déterminée**.

Cette décroissance peut être **plus ou moins rapide selon la nature des noyaux**, $\Delta N = -\lambda \times N \times \Delta t$

λ est une constante radioactive propre à l'élément.

Δt : durée de la mesure

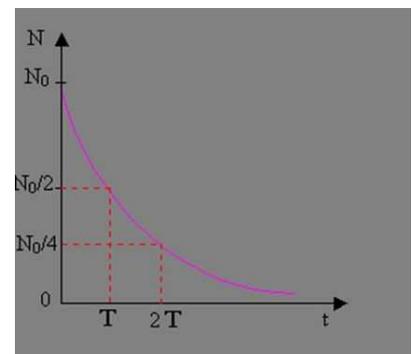
ΔN : nombre de noyaux désintégrés

Si on fait tendre Δt vers 0, la loi qui donne le nombre de désintégration pendant Δt devient :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \times N$$

Par des outils mathématiques (dérivée, équation différentielle), ceci nous conduit à :

$$N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$$



La demi-vie d'un noyau radioactif est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon macroscopique se soit désintégrée.

Cette demi-vie est caractéristique du noyau radioactif.

A chaque période T de temps, la quantité est divisée par 2.

Instabilité des éléments

- lors des nucléosyntheses, des isotopes instables sont formés
- Les isotopes se désintègrent en l'élément stable = radioactivité

Ex: $\begin{cases} {}^3_1\text{H} & {}^2_1\text{H} & \text{isotopes de } {}^1_1\text{H} \\ {}^{14}_6\text{C} & {}^{13}_6\text{C} & \text{isotopes de } {}^{12}_6\text{C} \end{cases}$

Ce phénomène est aléatoire | suit une évolution globale appelée décroissance radioactive

$T_0(\text{Radon}) = 3,83 \text{ jours}$ $T_0(\text{Uranium}) = 4,47 \text{ milliards}$

Utilisation des radioéléments: la radiométrie

isotopes ${}^{12}\text{C}$ ${}^{13}\text{C}$ ${}^{14}\text{C}$ seul ${}^{14}\text{C}$ est instable

on connaît N_0 : q.té fixe dans l'atmosphère
 on mesure N: q.té d'atomes ${}^{14}\text{C}$ présent dans le corps à dater
 on calcule E par le graphe de décroissance

■ Modèles d'évolution

Problèmes possibles

- ☑ Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- ☑ Loi de décroissance radioactive : modèle discret, modèle continu.
- ☑ Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- ☑ Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- ☑ Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- ☑ Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{t+1} = N_t + r(k - N_t)$, ou continu : $y' = ay(b - y)$.
- ☑ Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Contenus associés

- ☑ Suites récurrentes.
- ☑ Suites géométriques. Fonction exponentielle.
- ☑ Suites arithmético-géométriques. Équation différentielle $y' = ay + b$.
- ☑ Limites.

Exemples d'algorithmes

- ☑ Calcul des termes d'une suite.
- ☑ Recherche de seuils.
- ☑ Méthode d'Euler.

1. Loi de refroidissement de Newton

Le **taux de perte de chaleur** d'un corps est **proportionnel** à la **différence** de température entre le corps et le milieu environnant de température constante T_{air} .

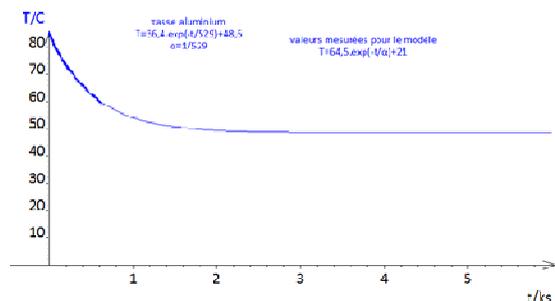
$$\frac{dT(t)}{dt} = h \times (T - T_{air})$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant permet de prévoir l'évolution de la température du corps au cours du temps :

$$T(t) = (T_0 - T_{air}) \times e^{-h \times t} + T_{air}$$

T_0 température initiale du corps

T_{air} : température du milieu dans lequel est placé le corps



2. Ordre d'une réaction chimique et loi de vitesse d'ordre 1

Pour une réaction du type $A + B \rightarrow C$

La vitesse de réaction admet un ordre si l'on peut l'écrire sous la forme : $V = k[A]^m[B]^n$

Avec :

k : la constante de vitesse qui est [fonction de la température](#)

m : l'ordre partiel par rapport à A

n : l'ordre partiel par rapport à B

V : la [vitesse de réaction](#)

L'ordre global de la réaction est égal à $m + n$

Ce modèle permet de prévoir l'évolution de la concentration des réactifs en fonction du temps.

Exemple d'ordre 1 $(\text{CH}_3)_3\text{C} - \text{Cl} + \text{OH}^- \rightarrow (\text{CH}_3)_3\text{C} - \text{OH} + \text{Cl}^-$

On note A le composé $(\text{CH}_3)_3\text{C} - \text{Cl}$

On considère un ordre partiel de 1 pour A et de 0 pour OH^-

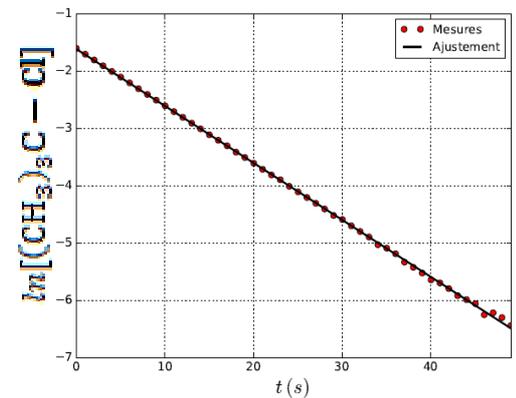
$$V = -d[A]/dt = k[A]$$

$$-d[A]/[A] = k dt \text{ on intègre } \ln[A] = -kt + \text{cte}$$

$$\text{à } t = 0 : \ln[A] = \ln[A_0]$$

d'où

$\ln[A] = -kt + \ln[A_0]$: la variation de $\ln[A]$ en fonction du temps est une droite de pente $-k$ et d'ordonnée à l'origine $\ln[A_0]$.



Expérimentalement, nous obtenons le graphe ci-contre qui confirme l'hypothèse d'ordre 1 par rapport à A.