Programme Mathématiques
Prémière Générale
Source: https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/pages/math1Spe.html

Algèbre
Analyse
Géométrie
Probabilités et statistiques

Algèbre: les suites

Suites

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$(u_n) \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$$

- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points.

Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :
   - Un premier terme : u_0 ou u_p
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec r raison de (u_n).
   (ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)
2) Une suite est arithmétique de raison r ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = r$$
3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :
$$u_n = u_0 + n\,r \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :
$$1+2+3\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Généralement pour la somme des premiers termes :
$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n = (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n = (n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}$$
$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de u_p à u_n

Exemple : $S = 8+13+18+\cdots+2013$

$$S = \underbrace{\left(\frac{2013-8}{5}+1\right)}_{\text{Nbre de termes}} \times \frac{8+2013}{2} = 406\,221$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :
$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :
   - Un premier terme : v_0 ou v_p
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$ avec q raison de (v_n).
   (ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)
2) Une suite est géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$
3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :
$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Somme des termes d'une suite géométrique $q \neq 1$

- Somme des $(n+1)$ premières puissance de q :
$$1+q+q^2\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
- Généralement pour la somme des premiers termes :
$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n = v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n = v_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$
$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de v_p à v_n

Comportement de la suite q^n

On a les limites suivantes selon les valeurs de q :
- si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

Variation d'une suite géométrique

- Si $q > 1$, la suite (q^n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est décroissante.

Pour une suite géométrique quelconque, on prendra en compte le premier terme v_0.
- Si $v_0 > 0$, (v_n) et (q^n) ont même variation.
- Si $v_0 < 0$, (v_n) et (q^n) ont des variations contraires

⚠ Si $q = 1$ ou $q = 0$, la suite (q^n) est constante.
Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls.
On montre par exemple, pour v_0 et v_1 non nuls, que :
$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Limites d'une suite

- **Convergence** d'une suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ signifie que

  Tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers ℓ.

Il n'existe qu'un nombre fini de termes à l'extérieur de cet intervalle.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est monotone et converge vers ℓ.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) se trouvent à l'intérieur d'un intervalle ouvert centré en ℓ de rayon r.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $|u - \ell| \geqslant r$
   faire
    $f(u) \to u$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

- **Divergence** d'une suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ signifie que

  Tout intervalle $]A\ ; +\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.
  Les termes de la suite (u_n) arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont supérieur à un réel A.

Variables : N entier, u réel
Entrées et initialisation
  $u_0 \to u$, $0 \to N$
Traitement
  tant que $u \leqslant A$ **faire**
    $f(u) \to u$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

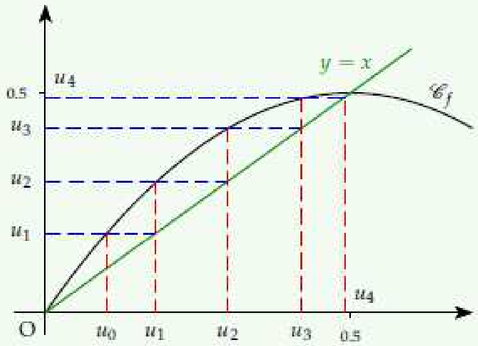
Remarque : une suite peut diverger sans avoir de limite.
La suite $[(-2)^n]$ diverge et n'admet pas de limite.

Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Variation** d'une suite d'une suite : **2 méthodes**
  1) On étudie le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$.
     Si la quantité est $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) la suite est croissante (resp. décroissante).
  2) Si tous les termes sont > 0, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
     Si la quantité est $\geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$), la suite est croissante (resp. décroissante).
- **Représentation** des premiers termes de la suite :

  Méthode : On trace la courbe de la fonction associée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

  Exemple : Soit la suite $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.



- Pour trouver la forme explicite de u_n, on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.
  Parmi ces suites, on a les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$

$$v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

Algèbre: polynôme second degré

Le second degré

On appelle trinôme du second degré la quantité :

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

Équation bicarrée

Une équation bicarrée est une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

On pose alors $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$

L'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

On résout en X.
On ne retient que les solutions positives.

On revient à x : $x = \pm\sqrt{X}$

Forme canonique du trinôme

Méthode : Pour déterminer la forme canonique :

- On met a en facteur.
- On considère les deux premiers termes comme le début d'un carré parfait.
- On ajoute puis on retranche le carré introduit.
- On réduit ensuite l'expression.

L'expression générale, **que l'on ne retient pas**, vaut :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Signe du trinôme

$\Delta > 0$. Le signe du trinôme est du signe de :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		a	0	$-a$	0	a	

$\Delta = 0$. Le trinôme est nul si $x = x_0$ et du signe de a sinon.

$\Delta < 0$. Le trinôme est toujours du signe de a

Racines du trinôme

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé discriminant.

- $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines

Fonction trinôme

Toute fonction trinôme f peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Selon le signe de a, on a les variations suivantes :

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

Système somme produit

Soit le système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$

Le système est symétrique donc :
si (x, y) est solution alors (y, x) l'est aussi.

x et y sont solutions de l'équation

$$X^2 - SX + P = 0$$

Factorisation. Somme et produit des racines

- $\Delta > 0$: x_1 et x_2 les deux racines.

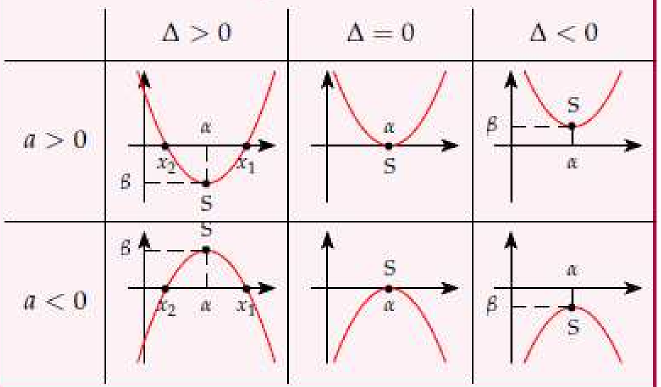
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- $\Delta = 0$: x_0 la racine double :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Représentations



Algèbre: : polynôme second degré

Équation paramétrique

Paramètre : Quantité fixé, souvent noté m, par opposition à une inconnue, noté x, utilisée pour désigner les coefficients devant l'inconnue.

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation (E_m).

- $m = 1$ L'équation (E_1) est du premier degré : $-2x + 4 = 0$.

  (E_1) admet une solution simple $x = 2$
- $m \neq 1$ L'équation (E_m) est du second degré.

  $\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+3) = 4(-2m+3)$

  Le signe de Δ est du signe de $(-2m+3)$.
- On remplit un tableau de signes en indiquant le nombre de solutions.

m	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
Nombre de solutions		2 sol. x_1 et x_2	1er deg. 1 sol.	2 sol. x_1 et x_2	x_0 sol. double	pas de solution	

Inéquation rationnelle se ramenant au second degré

Soit l'inéquation : $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} \geqslant 0$

- Racine de $x^2 + x - 2 = 0$

  $x_1 = 1$ racine évidente $P = -2$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -2$

  L'ensemble de définition est $D_f = \{-2\,;\,1\}$
- Racine de $2x^2 + 5x + 3 = 0$

  $x_1 = -1$ racine évidente $P = \dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

- $S =]-\infty\,;-2[\, \cup \left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right] \cup\,]1\,;+\infty[$

Équation se ramenant au second degré

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4} \qquad D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$$

$x \in D_f$ on multiplie par $4(x+2)(2x-5)$

$$4(2x-5) - 8(x+2) = 9(x+2)(2x-5)$$

$$8x - 20 - 8x - 16 = 18x^2 - 45x + 36x + 90$$

$$-18x^2 + 9x + 54 = 0 \overset{\div(-9)}{\Leftrightarrow} 2x^2 - x - 6 = 0$$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$ deux sol. distinctes

$x_1 = \dfrac{1+7}{4} = 2 \in D_f$ ou $x_2 = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2} \in D_f$

$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,2\right\}$

Équation bicarrée et système somme-produit

- Soit l'équation : $x^4 - 5x - 36 = 0$ On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$.

  L'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$ on a : $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2$

  Deux sol. $X_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9$ ou $X_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4 < 0$

  On ne retient que $X_1 \geqslant 0$, deux solutions pour x : $x_1 = 3$ ou $x_2 = -3$
- Soit le système $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$

  x et y sont solutions de $X^2 - 18X + 65 = 0$. On a $\Delta = 64 = 8^2$

  $X_1 = \dfrac{18+8}{2} = 13$ ou $X_2 = \dfrac{18-8}{2} = 5$ donc $S = \{(13,5)\,;\,(5,13)\}$

Analyse: dérivation

La fonction dérivée

La fonction dérivée est intimement liée à la notion de limite et de tangente.

Nombre dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I.
Soit $a \in$ I.
La fonction f admet un nombre dérivé en a, noté $f'(a)$, si la limite du taux d'accroissement existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⚠ On retiendra plutôt la première formulation.

Les physiciens utilisent la notation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

Variation d'une fonction dérivable

Soit une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante.
- Si $f' > 0$ sur I, alors f est croissante.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est décroissante.

Dérivées des fonctions élémentaires

Soit n un entier naturel non nul.

Fonction	Dérivée	Condition
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0\,;+\infty[$

Règles de dérivation

- Somme : $(u+v)' = u' + v'$
- Prd par un scalaire : $(\lambda u)' = \lambda u$
- Produit : $(uv)' = u'v + uv'$
- Inverse : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- Quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- Puissance : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Racine : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Si la fonction f admet un nombre dérivé en chacun des points de I, on dit que la fonction f est dérivable sur I.

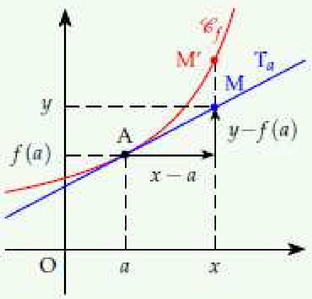
On définit alors sur I, la fonction dérivée, notée f', la fonction qui à x associe son nombre dérivé.

⚠ La plupart des fonctions élémentaires sont dérivable sur leur ensemble de définition à part la fonction racine qui est uniquement dérivable sur $]0\,;+\infty[$

Interprétations géométrique et numérique

Équation de la tangente T_a en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable en a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Lorsque x est proche de a, le point M' de $\mathscr{C}_f$ est proche du point M de T_a.

On peut alors faire l'approximation affine suivante :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$$

Extremum d'une fonction dérivable

Soit une fonction f sur un intervalle ouvert I contenant c.

- Si c est un extremum de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si f' s'annule en c en changeant de signe alors c est un extremum de f sur I.

⚠ Les extremum de la fonction sont à chercher parmi les « zéro » de la dérivée mais la condition de changement de signe est essentielle pour avoir un extremum (c.e. fonction cube en 0).

Dérivée et cinématique

En physique, la notion de dérivée est liée au calcul de la vitesse instantanée et de l'accélération.

Si $x(t)$ correspond à la position d'un point M se déplaçant sur l'axe des abscisses, on a alors :

- la vitesse instantanée : $v(t) = x'(t)$
- l'accélération : $a(t) = v'(t) = x''(t)$

x'' correspond à la dérivée seconde de x soit la dérivée de la dérivée de x

Calculs de dérivées

Quelques conseils lorsqu'on calcule une dérivée

- Comme il est plus facile de dériver une somme qu'un quotient, on ne cherchera pas à réduire au même dénominateur avant de dériver.
- Comme le signe de la dérivée donne les variation de la fonction, on cherchera à factoriser la dérivée lorsque cela est possible.
- On peut être amener à utiliser plusieurs règles pour dériver une fonction.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivation.

- $f_1(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 10$ on utilise la linéarité de la dérivée
$$f_1'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$$
- $f_2(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$ on ne réduit pas au même dénominateur !
$$f_2'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$
- $f_3(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ on dérive comme un quotient et l'on factorise !
$$f_3'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$
- $f_4(x) = (x^2+x+1)^3$ on dérive comme une puissance.
$$f_4'(x) = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$$
- $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ on dérive en utilisant les règles du quotient et de la racine.
$$f_5'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

La fonction f_5 est dérivable si $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ soit pour $x \in]-1\,;\,1[$

Étude et représentation d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction, on calcule la dérivée, on résout $f'(x) = 0$ puis on détermine le signe de la dérivée.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$
  a) Déterminer les variations de la fonction f.
  b) Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point $x = 1$.
  c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_1 ainsi que les tangentes horizontales, dans un repère d'unité 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

a) $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$.
f' s'annule en 0 et en 2 et son signe est celui du trinôme.
On dresse le tableau de variation

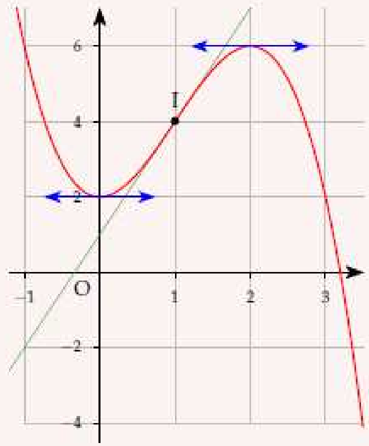
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

b) On calcule : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$.
$$T_1 : y = 3(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 1$$

c) On obtient la courbe suivante :

On peut montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point de symétrie en I.
Il faut montrer que :
$$f(1-x) + f(1+x) = 2f(1)$$

On peut montrer également que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution comprise entre 3 et 4.



Analyse: variation et courbe représentative de fonction

Fonctions de référence — Variations des fonctions associées

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

f est une relation qui à un réel x associe un unique réel y tel que : $y = f(x)$

Généralités

Ensemble de définition D_f : ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction f est définie.

Lorsque D_f est symétrique par rapport à l'origine :

Fonction paire : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O.

Relations entre deux fonctions

Soit les fonctions f et g définies sur I.

On définit alors les relations suivantes :

- $f = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = g(x)$
- $f > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) > 0$
- $f > g \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) > g(x)$

Fonction affine et fonction racine

Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$

- a est le **coefficient directeur**.
  Son signe donne les variations de la fonction affine.
- b est l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$.
- $\mathscr{C}_f$ est une droite passant par le point $(0, b)$

La f[nt] racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Variations

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non) contenant a et b. Soit une fonction f définie sur I :

- f croissante sur I $\Leftrightarrow [\,a < b \Rightarrow f(a) < f(b)\,]$
- f décroissante sur I $\Leftrightarrow [\,a < b \Rightarrow f(a) > f(b)\,]$
- f monotone sur I $\Leftrightarrow$ f croissante ou décroissante sur I

Une fonction croissante conserve l'inégalité.
Une fonction décroissante inverse l'inégalité.

Fonction carrée et fonction du second degré

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

- f est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$ et **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.
- $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe (Oy) de sommet O.

Une fonction du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

- Le signe de a donne les variations de la fonction f.
- $\mathscr{C}_f$ est une parabole d'axe $x = \alpha$ et de sommet $\mathrm{S}(\alpha, \beta)$.

Variations des fonctions associées

Somme : $k \in \mathbb{R}^*$ et u, v deux fonction définies sur I.

- u et $u + k$ ont mêmes variations.
- Si u et v croissantes sur I alors $u + v$ croissante sur I.
- Si u et v décroissantes sur I alors $u + v$ décroissante sur I.

Produit par un réel : $\lambda \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie sur I.

- Si $\lambda > 0$ alors u et λu ont mêmes variations.
- Si $\lambda < 0$ alors u et λu ont des variations contraires.

Soit $u > 0$ sur I alors u et $\sqrt{u}$ ont mêmes variations sur I.

Inverse : soit u une fonction de signe constant sur I.

Les fonction u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires sur I.

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour tous x et y réel

- Distance : $|x - a|$ est la distance de x au réel a.
- Parité : $|x| = |-x|$.
- Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
- Équation : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
- Inéquation : $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$.
- Racine carrée : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Fonction inverse et fonction homographique

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- f est **décroissante** sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\mathscr{C}_f$ est une hyperbole équilatère de centre O dont les asymptotes sont les axes de coordonnées.

Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ par

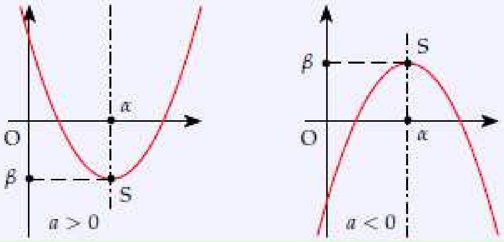
$$f(x) = \frac{a}{x - \alpha} + \beta.$$

- Le signe de a donne les variations de la fonction f.
- $\mathscr{C}_f$ est une hyperbole équilatère de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ dont les asymptotes sont les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$.

Analyse: variation et courbe représentative de fonction

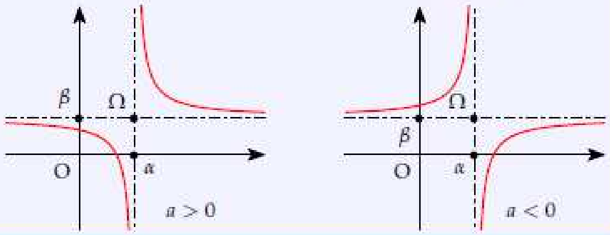
Fonctions du second degré

Représentation des fonctions : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$



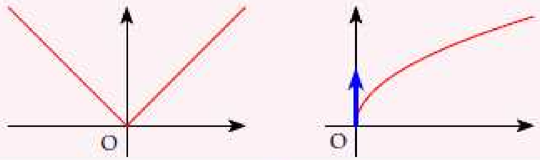
Fonctions homographiques

Représentation des fonctions : $f(x) = \dfrac{a}{x-\alpha} + \beta$



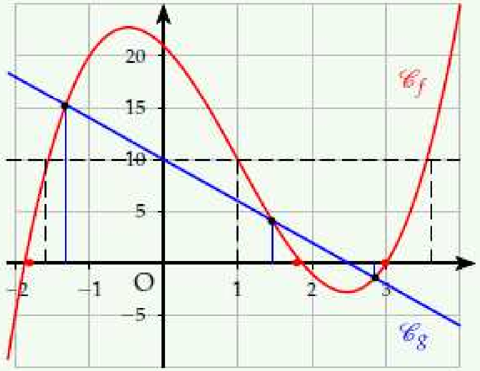
Fonctions valeur absolue et racine carrée

Représentation des f$^{\text{nt}}$: $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$.



Représentations graphique

Soit les représentations $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction affine g.



Résolutions graphiques

$f(x) = 0$: On cherche les abscisses des points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

$$S_1 = \{-1,8\,;\,1,8\,;\,3\}$$

$f(x) \geqslant 10$: On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au-dessus de la droite $y = 10$.

$$S_2 = [-1,6\,;\,1] \cup [3,6\,;+\infty[$$

$f(x) \leqslant -4x+10$: On trace la droite $y = -4x+10$.
Elle passe par les points $(0;10)$ et $(2,5;0)$.
Elle correspond à $\mathscr{C}_g$.
On cherche les abscisses des pts de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

$$S_3 =]-\infty\,;-1,3] \cup [1,5\,;\,2,8]$$

Résolutions équations et inéquations

- $|x-2| = |2x+1| \Leftrightarrow x-2=2x+1$ **ou** $x-2=-2x-1$
  $\Leftrightarrow S_1 = \left\{-3\,;\,\dfrac{1}{3}\right\}$
- $|x-2| > 5 \Leftrightarrow -5 < x-2 < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7$
  $\Leftrightarrow S_2 = [-3\,;\,7]$
- $|x+3| > 2 \Leftrightarrow x+3 > 2$ **ou** $x+3 < -2$
  $\Leftrightarrow S_3 =]-\infty, -5[\cup]-1;+\infty[$
- $|3x+1| \geqslant |2x+4| \Leftrightarrow (3x+1)^2 \geqslant (2x+4)^2$
  $\Leftrightarrow (3x+1)^2 - (2x+4)^2 \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow (x-3)(5x+5) \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow S_4 =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$

Somme de deux fonctions

Variation sur $I =]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -5x+3+\frac{1}{x} = u(x)+v(x)$$

- $u(x) = -5x+3$: la fonction u est décroissante sur I.
- $v(x) = \dfrac{1}{x}$: la fonction v est décroissante sur I.

Par somme la fonction f est décroissante sur I.

Produit d'une fonction par un scalaire

Variation sur $I = [0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -4\sqrt{x} = -4u(x)$$

- $u(x) = \sqrt{x}$: la fonction u est croissante sur I.

Par produit par -4 la fonction f est décroissante sur I.

Racine et inverse d'une fonction

Variation sur $I =]-\infty\,;\,\frac{1}{2}]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1-2x} = \sqrt{u(x)}$$

- $1-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in I$
- $u(x) = 1-2x$: la fonction u est décroissante sur I.

Comme les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont même variation, la fonction f est décroissante sur I.

Analyse: fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus

Dérivabilité

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$, $x \longmapsto \sin(x)$ $\qquad$ $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$, $x \longmapsto \cos(x)$

sin et cos sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$.

- $\sin' x = +\cos x$
- $\cos' x = -\sin x$

Dérivées de la composée

Soit u une fonction dérivable sur I

$$\sin \circ u \;:\; x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\sin} \sin[u(x)]$$

$$\cos \circ u \;:\; x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\cos} \cos[u(x)]$$

$\sin \circ u$ et $\cos \circ u$ sont dérivables sur I et

- $\forall x \in \mathrm{I},\ (\sin \circ u)'(x) = +u'(x)\cos[u(x)]$
- $\forall x \in \mathrm{I},\ (\cos \circ u)'(x) = -u'(x)\sin[u(x)]$

Exemple : $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Formules élémentaires

- sin et cos sont bornées $\begin{cases} -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- De sinus à cosinus :
  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Intervalle d'étude

sin et cos sont 2π-périodique et respectivement impaire et paire, on peut restreindre leur intervalle d'étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On complète ensuite sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x$			$-$		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Périodicité et parité

1) sin et cos sont 2π-périodique :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x + 2\pi) = \cos x$
2) - La fonction sin est impaire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x$
     $\mathscr{C}_{\sin}$ admet l'origine O pour centre de symétrie.
   - La fonction cos est paire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x$
     $\mathscr{C}_{\cos}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Limites utiles - ROC

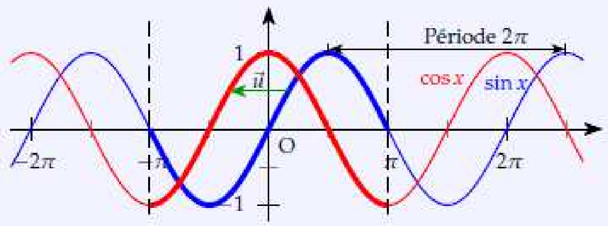
Limites qui reviennent aux nombres dérivés en 0 :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

Application : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$

Courbes représentatives

- Les courbes de sin et cos sont des sinusoïdes.
- On déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.



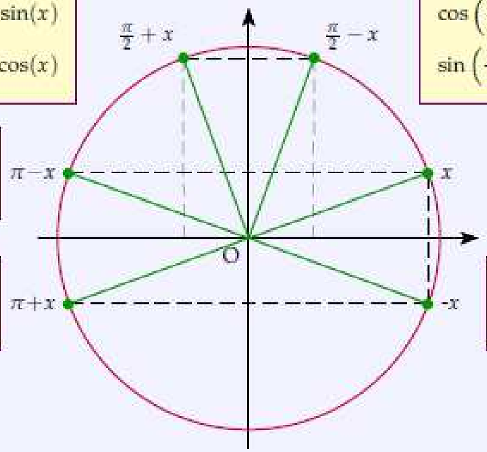
Analyse: fonctions trigonométriques

Symétries et compléments

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$

$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
$\sin(\pi-x)=\sin(x)$



$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$
$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$

$\cos(-x)=\cos(x)$
$\sin(-x)=-\sin(x)$

Exemple d'application

Soit $A=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{23\pi}{14}$. Montrer que $A=0$

$$\begin{aligned}
A&=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos-\frac{5\pi}{14} \qquad \text{car } \frac{23\pi}{14}=-\frac{5\pi}{14}\ [2\pi]\\
&=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\frac{5\pi}{14}\\
&=\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\\
&=-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\\
&=0
\end{aligned}$$

Applications des formules

- **Relations fondamentales :** Sachant que $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer $\sin\frac{\pi}{5}$

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}=\frac{10-2\sqrt{2}}{16}\quad\overset{\cos\frac{\pi}{5}>0}{\Rightarrow}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

- **Formules d'addition :**

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- **Formules de linéarisation :**

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\quad\overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Rightarrow}\quad\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\quad\overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Rightarrow}\quad\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

La fonction exponentielle de base e

où $e \approx 2,718$ à 10^{-3} près

Définition et problème universel

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction f solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $f' = f$ satisfaisant à la condition $f(0) = 1$.

Remarque : On montre que cette fonction ne peut s'annuler, donc est positive sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est unique.

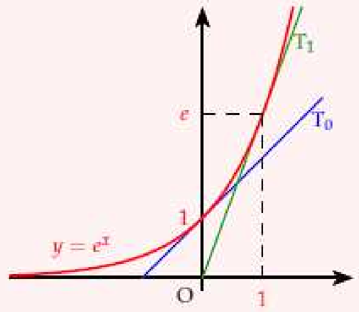
Comportement asymptotique

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_{\exp}$ au voisinage de $-\infty$

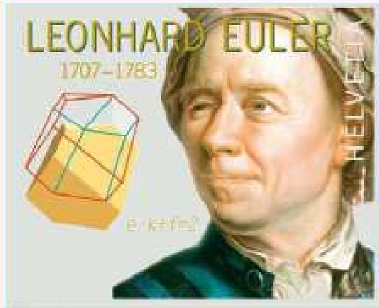
Carte d'identité de la fonction « exp »

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



$T_0 :\ y = x + 1$

$T_1 :\ y = ex$



$$\begin{aligned} \exp :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[\\ x &\longmapsto \exp(x) = e^x \end{aligned}$$ ((notation d'Euler)

Avantage : La notation d'Euler rend les propriétés algébriques « naturelles » donc faciles à manipuler et à mémoriser

exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$.

Conséquence : comme , $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriétés algébriques

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \quad (e^x)^n = e^{nx}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

  Cas particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

Limites de référence à connaître et à reconnaître !

Croissance comparée

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$

Variation en 0

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

⚠ sans ces théorèmes, on aurait des formes indéterminées

Analyse: fonction exponentielle

Résolution d'équations et d'inéquations

- $e^a = e^b \iff a = b$
  On dit que la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$
- Si $a > 0$, $e^x = a \iff X = \ln a$
- Si $a \leqslant 0$, $e^x = a$ n'admet pas de solution
- **Changements de variables :** les plus fréquents étant $X = e^x$ ou $X = e^{-x}$
  Le but est de se ramener à un problème simple (second degré, ...)
- $e^a \geqslant e^b \iff a \geqslant b$
  Car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

Composée avec l'exponentielle

$$\exp \circ u \;:\; x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\exp} \exp[u(x)] = e^{u(x)}$$

- $\exp[u(x)]$ existe ssi $x \in D_u$
- $\exp \circ u$ est dérivable partout où la fonction u est dérivable.

$$\forall x \in D_{u'},\quad (\exp \circ u)'(x) = \exp'[u(x)] \times u'(x)$$

- On note : $(e^u)' = u'\,e^u$.

  Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$

Culture : quelques fonctions « avatars » de exp

1) Fonction exponentielle de base $a > 0$

$$\exp_a \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$$

Il s'agit d'un cas particulier de fonction composée avec $u \;:\; x \longmapsto u(x) = x \ln a$.

2) Fonction cosinus hyperbolique

$$\text{ch} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) Fonction sinus hyperbolique

$$\text{sh} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Vous disposez en terminale S de tous les outils pour vous faire une idée précise de ces fonctions ou famille de fonctions.

Géométrie: produit scalaire, vectoriel

Le produit scalaire
dans le plan

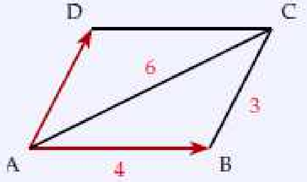
1ʳᵉ définition : définition normative

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et lu « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)$$

Remarque : Cette définition mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit ABCD un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



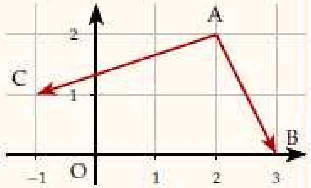
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{AD}||^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)=\frac{11}{2}$$

2ᵉ définition : définition analytique

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=xx'+yy'$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$



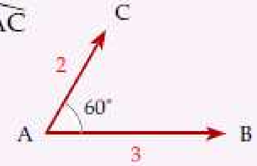
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=1(-3)+(-2)(-1)=-1$$

3ᵉ définition : définition projective

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\&=3\times2\times\cos 60°\\&=6\times\frac{1}{2}=3\end{aligned}$$



Remarque :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Leftrightarrow\widehat{BAC}<90°$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0\Leftrightarrow\widehat{BAC}>90°$$

Propriétés algébriques du produit scalaire

- Commutativité : $\forall\,\vec{u},\,\vec{v}$

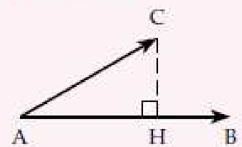
  $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ car $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\vec{v},\vec{u})$
- Bilinéarité : $\forall\,\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}$ et $\forall a,\,b\in\mathbb{R}$

  $\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab\times\vec{u}\cdot\vec{v}$

Théorème de la projection

Soit H la projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$$



Détecteur d'angle droit

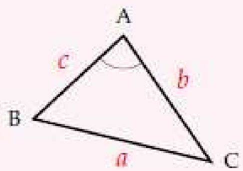
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont portés par des droites}\\ \text{perpendiculaires}\end{cases}$$

Relation d'Al-Kashi

Généralisation du théorème de Pythagore.

a, b et c sont les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

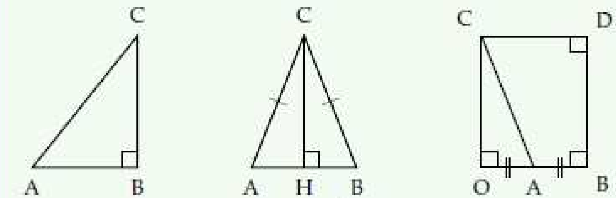


$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

Par permutation circulaire :

- $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\widehat{B}$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

Quelques applications de la projection



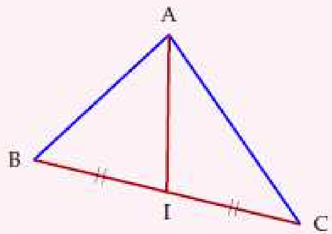
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB^2$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB^2$

Géométrie: produit scalaire, vectoriel

Théorème de la médiane
(à savoir démontrer !)

Soit I le milieu du segment [BC], alors pour tout point A du plan :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$



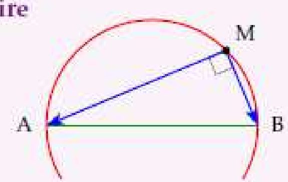
Démonstration

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2 \times \overrightarrow{AI}\,(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}}) + \underbrace{IB^2 + IC^2}_{IB=IC=\frac{BC}{2}} \end{aligned}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Cercle et produit scalaire

$$\begin{cases} M \in \mathscr{C} \\ \text{de diamètre } [AB] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AMB \text{ est rectangle en } M \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \end{cases}$$



On appelle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M^2 = r^2 \\ (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2 \end{cases}$$

Méthode : savoir réduire une forme développée d'un cercle pour trouver ses éléments caractéristiques (centre et rayon). Soit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) + (y^2 + 6y) + \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+3)^2 - 9 + \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = 4$$

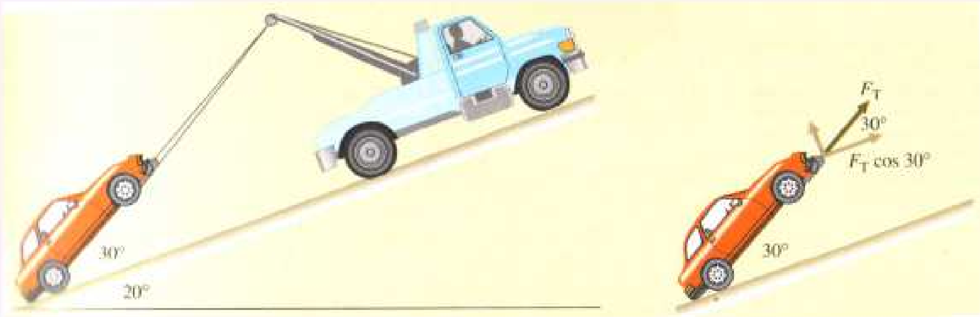
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,-3\right)$ et de rayon $r = 2$

Application du produit scalaire à la physique : travail d'une force

Le travail d'une force est une des origines du produit scalaire en mathématique. Le travail W « *work* » de cette force F mesure la participation d'une force dans le déplacement d'un mobile. Il est défini comme le produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{\ell}$.
Il se mesure en joules.

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\ell}$$

Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20°. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30°avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si celle-ci la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente.



L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$W = \overrightarrow{F_T} \cdot \overrightarrow{\ell} = F_T \times \ell \times \cos 30° = 1600 \times 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 400\,000\sqrt{3}\ \text{J} \approx 692,82\ \text{kJ}$$

Les droites du plan

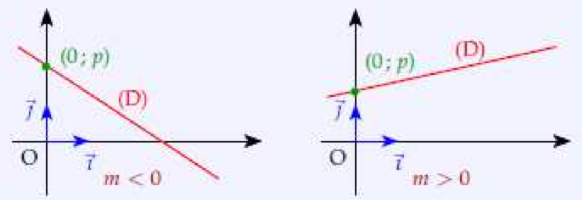
On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Équation réduite d'une droite

Soit une droite (D), non verticale. Elle admet une unique équation réduite de la forme :

$$y = mx + p$$

- $m \in \mathbb{R}$, désigne le coefficient directeur (ou pente). Il renseigne sur l'inclinaison de la droite.
- $p \in \mathbb{R}$ est appelé « ordonnée à l'origine »



- Si $m = 0$, la droite (D) est **horizontale**

Représentation graphique

Exemple : Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite d'équation $y = -2x + 5$ (1)

Méthode : On construit un tableau de valeurs :

x	0	1	2
y	5	3	1
$(x;y)$	(0;5)	(1;3)	(3;1)

On choisit 2 ou 3 valeurs de x.
On calcule les « y »
On obtient les points de (D)

⚠ On choisit judicieusement les valeurs de « x » de façon à avoir un tracé précis i.e. des points suffisamment éloignés.

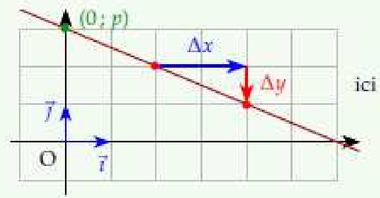
Calcul de m et lecture graphique

- Calcul algébrique : soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points de la droite (D) tels que $x_A \neq y_A$ on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{et} \quad p = y_A - m x_A$$

⚠ Si la droite est tracée, il faut s'assurer que le signe de m est cohérent avec l'allure de la droite…

- Lecture graphique



ici $m = \frac{-1}{2}$

⚠ Privilégier les nœuds du quadrillage pour lire m.

Vecteur directeur et équation réduite

Si une droite (D) est donnée par son équation réduite, elle admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\,m)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$

Soient $(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$

- Si $m = m'$ alors, (D)//(D')
- Si $m \neq m'$ alors, (D) et (D') sécantes

⚠ Si $m\,m' = -1$ alors, $(D) \perp (D')$ (cf produit scalaire)

Droites particulières

- Les droites **verticales** : $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  L'équation $x = 0$ représente l'axe des ordonnées.

  Pas de coefficient directeur. La pente est « infinie ».
  Les droites verticales sont dirigées par le vecteur $\vec{\jmath}(0\,;\,1)$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{\jmath}$
- Les droites **horizontales** : $y = p$, $p \in \mathbb{R}$
  L'équation $y = 0$ représente l'axe des abscisses.

  Le coefficient directeur est **nul**.
  Les droites horizontale sont dirigées par le vecteur $\vec{\imath}(1\,;\,0)$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{\imath}$.

Équation cartésienne d'une droite

Soit (D) une droite. Elle admet une équation cartésienne i.e. une description de la forme :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a;b) \neq (0;0)$$

⚠ Cette équation n'est pas unique.

- Si $b = 0$, la droite (D) est verticale.
- Si $a = 0$, la droite (D) est horizontale.

La droite (D) admet :

- pour **vecteur directeur** $\vec{u}(-b\,;\,a)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$;
- pour **vecteur normal** $\vec{n}(a\,;\,b)$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$. On a alors $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Droites parallèles et droites sécantes

Soient $\begin{cases} (D) : ax + by + c = 0 \\ (D') : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- $(D)//(D') \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ **colinéaires**

  $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow -ba' - a(-b') = 0$
- Si (D) et (D') sont sécantes en I, les coordonnées de I sont **solutions** du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Méthode pour déterminer une équation cartésienne

Soient les point $A(1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,-4)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3-1 \\ y-2 & -4-2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -6(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x - 2y + 10 = 0 \overset{\div(-2)}{\Leftrightarrow} 3x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Quelques contextes et questions classiques

- Une droite est définie par 2 points distincts ou par un point et une vecteur directeur (non nul).
- Vecteur et coefficient directeur

  (D) : $3x + 5y + 2 = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$.

  L'équation réduite (D) : $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{3}$ a pour coefficient directeur $m = -\dfrac{3}{5}$
- Lorsqu'il s'agit de démontrer que trois droites sont concourantes, on détermine le point d'intersection I des deux premières droites et l'on vérifie que I appartient à la troisième !

  Remarque : Bien entendu, s'il s'agit de droites remarquables du triangle : médianes, hauteurs, médiatrices ou bissectrices, d'après leurs propriétés, on peut affirmer qu'elle sont concourantes sans avoir à le démontrer.
- Un contexte fréquent est celui d'une famille « infinie » de droites

  Exemple : Soit $m \in \mathbb{R}$, on pose $d_m\ :\ (2m+3)x - (m-1)y - 10 = 0$

  Le principe : À chaque valeur du paramètre m, on associe une droite :

  Si $m = 1$ alors $d_1\ :\ 5x - 10 = 0$ droite verticale.

  Si $m = 2$ alors $d_2\ :\ 7x - y - 10 = 0$ etc.

  Dans ces exercices, il s'agit d'étudier les propriétés de cette famille.

Géométrie: géométrie repérée

Les figures géométriques

C'est au XIXe siècle, grâce à Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que l'aspect géométrique des nombres complexes gagne ses lettres de noblesse.

Les points

- A, B, C sont trois points alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire ssi

$$z_{\overrightarrow{AC}} = k z_{\overrightarrow{AB}} \iff z_C - z_A = k(z_B - z_A)$$

- A, B, C sont trois points alignés ssi :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Les cercles

- $M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \iff \Omega M = r \iff |z_M - z_\Omega| = r$
- $M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \iff \Omega M^2 = r^2 \iff$

$$(x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = r^2$$

Reconnaître une équation de cercle

Exemple : Soit $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$

$$\iff x^2 + x + y^2 + y - 6 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

$\mathscr{C}$ est de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Les droites

- Si (D) n'est pas une droite verticale, elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$.
- Toute droite (D) admet comme équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

- Droites particulières :
  1) L'axe des abscisses a pour équation : $y = 0$
  2) L'axe des ordonnées a pour équation : $x = 0$
  3) Si M est un point de la médiatrice de [AB]
     $\iff AM = BM \iff |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

Triangle rectangle

- ABC rectangle en A $\iff AB^2 + AC^2 = BC^2 \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- ABC rectangle en A $\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \text{ (imaginaire pur)}$$

- Si on joint un point M aux extrémités d'un diamètre [AB] alors ABM est rectangle en M.

Triangle isocèle

- ABC isocèle en A $\iff AB = AC \iff$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

- ABC isocèle rectangle en A $\iff$

$$AB = AB \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

Triangle équilatéral

- ABC est équilatéral $\iff$
  $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$
- ABC équilatéral
  $\iff$ ABC isocèle en A et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Probabilités et statistiques: probabilité conditionnelle et indépendance

Les probabilités discrètes

Définition

Ω : l'univers, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.

A : événement, sous-ensemble de l'univers Ω

$\overline{A}$: événement contraire, complémentaire de A dans Ω

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω, est la fonction p à valeur dans $[0\,;\,1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n événements élémentaires de Ω

- $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$
- $p(\varnothing) = 0$
- Pour tout événements A et B, on a les relations :

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Indépendance

Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits indépendants ssi :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Autres formulations avec $p(A) \neq 0$ et $(B) \neq 0$

$$p_A(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_B(A) = p(A)$$

Conséquence : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également. (ROC)

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Probabilité conditionnelle

Soit A, un événement de probabilité non nulle.

On pose : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On lit « probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé ». On parle de probabilité conditionnelle

⚠ Bien interpréter les énoncés et à ne pas confondre $p(A \cap B)$ et $p_A(B)\ldots$

Détecteur de condition : « parmi », « sachant que », « On a B. Quelle est la probabilité de A », « Si B, probabilité de A »

Partition de Ω

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω, alors les événements A_i sont deux à deux incompatibles et :

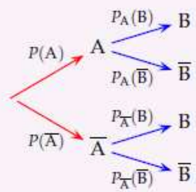
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

Probabilité totale : pour tout événement B on a

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Cas fréquent en terminale : partition A et $\overline{A}$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B)$$



Culture - Formule de Bayes

Cette formule est aussi appelée « théorème de la probabilité des causes », car elle permet de renverser un conditionnement. On l'obtient en remarquant que la probabilité d'une intersection $A \cap B$ peut s'écrire soit en conditionnant A par B, soit en conditionnant B par A :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Comme par ailleurs

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

On obtient la formule : $p(B) \neq 0$

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$