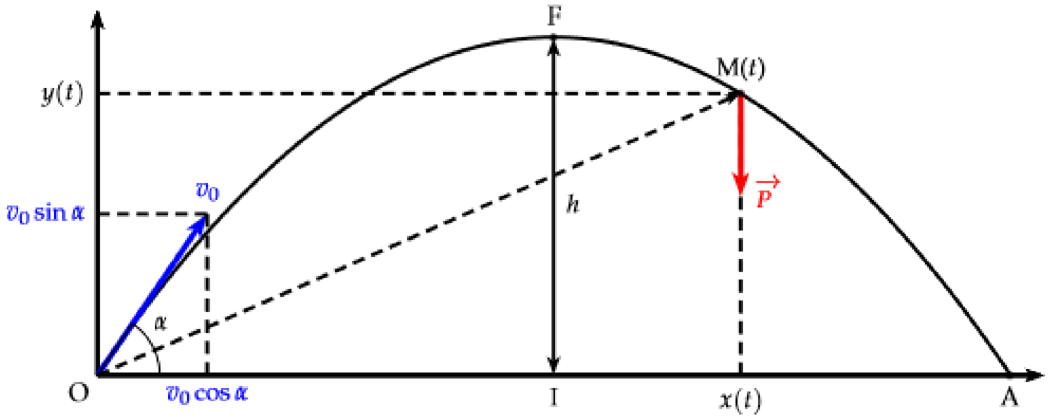
Chapitre 05
Quelques mouvements particuliers

Table des matières

1 Mouvement d'un projectile

1.1 Énoncé du problème

On lance un ballon de foot avec un angle α par rapport à l'horizontale avec une vitesse initiale v_0.
On peut alors faire le schéma suivant :



1.2 Équations horaires

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen car correspondant aux conditions de laboratoire.
On considére le repère Oxy, plan correspondant au mouvement : Ox correspondant à l'horizontale et Oy à la verticale.
La seule force extérieure au système (le ballon de foot) est le poids.
D'après le PFD, on a : $\vec{P} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$

On intègre deux fois le vecteur accélération, que l'on projette sur les deux axes, pour obtenir les équations horaires du système :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\alpha \, t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t \end{array} \right.$$

On obtient alors les équations horaires du mouvement suivantes :

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \, t \quad (1)$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \, t \quad (2)$$

1.3 Équation de la trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut isoler t dans l'équation horaire (1) puis le remplacer dans l'équation horaire (2) :

De (1), on a : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

On remplace dans (2) : $y = -\dfrac{1}{2}g \left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)$

On obtient l'équation de la trajectoire suivante :

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 + \tan \alpha\, x$$

1.4 Calcul de la portée

La trajectoire est donc une parabole. Pour déterminer la portée, il faut déterminer la distance OA, c'est à dire la distance x_A où le ballon retombe sur le sol soit pour $y = 0$.

D'après l'équation de la trajectoire, on a :

$$\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 + \tan \alpha\, x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x + \tan \alpha \right) = 0$$

La solution x_A étant la solution non nulle, on a :

$$\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x_A + \tan \alpha = 0$$

$$x_A = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g}$$

$$x_A = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

D'après les formules de duplication : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, on a :

$$\mathrm{OA} = x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Remarque : Pour déterminer la portée maximale, on doit avoir $\sin 2\alpha = 1$ qui correspond à $\alpha = \frac{\pi}{4}$

1.5 Calcul de la flèche

La flèche correspond à la hauteur maximale atteinte par le ballon. Sur notre schéma la flèche correspond à la hauteur h atteinte pour l'abscisse OI.

a) **Première méthode : symétrie de la parabole**

D'après la symétrie de la parabole, on a : $\mathrm{OI} = \frac{\mathrm{OA}}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, \mathrm{OI}^2 + \tan \alpha\, \mathrm{OI} \\
&= \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2} + \tan \alpha \times \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\
&= -\frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{8g \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)}{2g} \\
&= -\frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{8g \cos^2 \alpha} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}
\end{aligned}$$

$$h = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

b) **Deuxième méthode : tangente horizontale**

La flèche est obtenue lorsque la vitesse est horizontale soit quand $v_y = 0$

On a alors : $-gt + v_0 \sin\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

On remplace alors dans l'équation horaire de $y(t)$, on obtient :

$$h = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$
$$= -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

2 Mouvement d'une charge à l'intérieur d'un champs électrostatique

2.1 Énoncé du problème

On considére une particule chargée en O de vitesse initiale v_0 à l'intérieur d'un condensateur. On peut alors faire le schéma suivant :

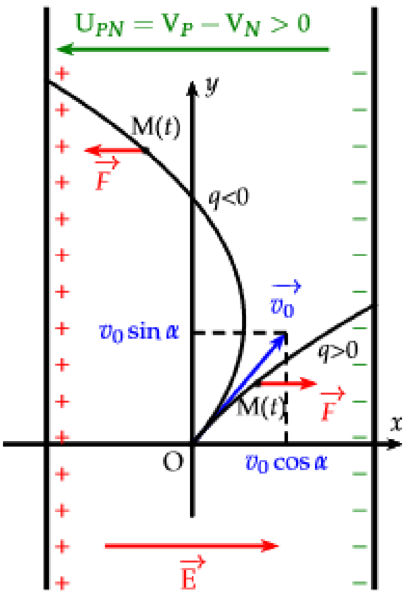
On note :

- $\overrightarrow{E}$: le champ électrostatique uniforme à l'intérieur du condensateur.
- U_{PN} [1] : la différence de potentiel entre les deux plaques
- q : la particule chargée en mouvement
- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$: la force élétrostatique

Le poids P est négligeable devant la force électrostatique F ($P/F \simeq 10^{-8}$)

Le schéma ci-contre montre la trajectoire de la particule suivant le signe de la charge.

On considère le repère Oxy



1. ⚠ La notation de la différence de potentiel est l'inverse de la notation vectorielle.

Le référentiel terrestre peut-être considéré comme galiléen car correspondant aux conditions de laboratoire

2.2 Équations horaires

Comme le poids est négligeable devant la force électrostatique, d'après le PFD, on a :

$$\overrightarrow{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad q\overrightarrow{E} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}$$

On intègre deux fois le vecteur accélération, que l'on projette sur les deux axes, pour obtenir les équations horaire du système (la particule chargée) :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \dfrac{qE}{m} \\ 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dfrac{qE}{m}\,t + v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} \dfrac{qE}{2m}\,t^2 + v_0 \cos\alpha\, t \\ v_0 \sin\alpha\, t \end{array} \right.$$

On obtient alors les équations horaires du mouvement suivantes :

$$x(t) = \frac{qE}{2m}\,t^2 + v_0 \cos\alpha\, t \quad (1)$$
$$y(t) = v_0 \sin\alpha\, t \quad (2)$$

Remarque : Dans le cas particulier où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient les équations horaires suivantes :

$$x(t) = \frac{qE}{2m}\,t^2$$
$$y(t) = v_0\, t$$

2.3 Équation de la trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut isoler t dans l'équation horaire (2) puis le remplacer dans l'équation (1) :

De (2), on a : $t = \dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}$

On remplace dans (1) : $x = \dfrac{qE}{2m}\left(\dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}\right)^2 + v_0 \cos\alpha \left(\dfrac{y}{v_0 \sin\alpha}\right)$

On obtient l'équation de la trajectoire suivante :

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2\alpha}\,y^2 + \frac{y}{\tan\alpha}$$

On obtient alors une parabole d'axe parallèle à l'axe Ox.

Remarque : Dans le cas particulier où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, on a alors comme équation de la trajectoire :

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2}\,y^2$$